50 gotowych scenariuszy lekcji matematyki

45 minut • konkretne cele i zadania



Początek, praktyka, wsparcie i sprawdzenie

Klasy 4–8 • liceum i technikum

Indeks i etap szkolny

L001–L006



L001–L006: liczby, udział, wzory, jednostki, współrzędne i badanie danych.

L007–L018



L007–L018: działania, procenty, wyrażenia, figury i wykresy.

L019–L030



L019–L030: kolejność działań, procent liczby, rozdzielność, proporcjonalność, pola i średnia.

L031–L042



L031–L042: podzielność, porównania, rozkład, pola, zera funkcji, mediana i rabaty.

L043–L050



L043–L050: liczby całkowite, podwyżki, równania, koło, funkcja liniowa, średnia ważona i kolejne zmiany.



Każdy plan zajmuje dwie strony.
L001 zaczyna się na stronie 5.
Numer pierwszej strony planu n: **2 n+3**.



Etap wskazano w każdym planie.
Formalne pojęcia funkcji i wzory skróconego mnożenia kieruj do klas, które je realizują.

Dostosuj plan do klasy



Przeczytaj wymagania wstępne i przeprowadź krótką diagnozę z planu. Gdy klasa ich nie spełnia, zacznij od przykładu ze wsparciem.



Cel jest wspólny; zakres podpowiedzi może być różny. Uczeń pracujący szybciej uzasadnia lub uogólnia, zamiast otrzymywać więcej tych samych rachunków.



Czasy są orientacyjne i sumują się do 45 minut. Po diagnozie możesz wydłużyć modelowanie kosztem liczby ćwiczeń.



Sprawdź zgodność tematu z aktualnym programem klasy. Przykłady oraz scenariusze są autorskim opracowaniem.



Bilet wyjścia wykonuje każdy samodzielnie; jego wynik służy do planowania następnego kroku.

Rytm 45 minut



0–5	0–5: próba wejściowa, ustalenie celu.
5–12	5–12: wspólny model i jawne uzasadnienie.
12–20	**12–20:** pierwsze ćwiczenie oraz porównanie metod.
20–32	**20–32:** praca uczniów; nauczyciel dobiera wsparcie i pytanie pogłębiające.
32–39	**32–39:** omówienie argumentów i naprawa konkretnego błędu.
39–42	**39–42:** synteza reguły wraz z warunkami.
42–45	**42–45:** samodzielny bilet wyjścia.



Oceń: zgodność modelu, poprawność rachunku i uzasadnienie. Nie utożsamiaj szybkości ani staranności graficznej z opanowaniem pojęcia.

L001 • Wartość cyfry i szacunek

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Odczytujesz wartość cyfry i kontrolujesz sumę szacunkiem.

Wiadomości wstępne:
jedności, dziesiątki, setki

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

0–5

poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych.
Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12

wspólny model. W liczbie 4307 cyfra 3 oznacza 300.
Oszacuj 4307+189 jako 4300+200.



12–20

uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L001 • Praktyka i sprawdzenie

20–32: Oblicz **4307+189** i **5608−294**, sprawdź rząd wielkości.

4307 + 189 =	5608 − 294 =

Wsparcie: Rozpisz liczby na składniki pozycyjne.

Pogłębienie: Wyjaśnij wpływ przesunięcia cyfry o dwa miejsca w lewo.

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

Rozwiązanie A	Rozwiązanie B

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia: Jaką wartość ma 7 w liczbie 6721?

Odpowiedzi i kontrola: Suma 4496; różnica 5314; bilet 700. Pogłębienie: Wartość cyfry mnoży się przez 100.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L002 • Udział nie jest stosunkiem części

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Rozróżniasz część do całości i część do części.

Wiadomości wstępne:
ułamek jako część zbioru

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

0–5
poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12
wspólny model. Model 10 kart: 4 niebieskie, 6 białych. Udział 4/10, stosunek 4:6.

12–20
uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

Model do wspólnej analizy



Model 10 kart: 4 niebieskie, 6 białych.
Udział 4/10, stosunek 4:6.

Twoja praca

L002 • Praktyka i sprawdzenie

20–32: Porównaj dwa **modele:** 3 z 12 oraz 5 z 20. Wyjaśnij równość udziałów.

Wsparcie: Obrysuj całość przed zapisaniem mianownika.

Pogłębienie: Zmień liczebność bez zmiany udziału.

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

Rozwiązanie A

Rozwiązanie B

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • **Bilet wyjścia:** Wśród 9 żetonów 3 zielone. Jaki udział zielonych?

Odpowiedzi i kontrola: Udziały 1/4 i bilet 1/3; stosunek zielonych do innych 1:2.
Pogłębienie: Np. 3/12=6/24.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L003 • Wzór ukryty w wzorze kropek

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Zapisujesz regułę stałego przyrostu z właściwym numerowaniem.

Wiadomości wstępne:
mnożenie i oznaczanie niewiadomej

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. Etapy 1–4 mają 6; 10; 14; 18 kropek. Reguła 4 n+2.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

Model do wspólnej analizy



L003 • Praktyka i sprawdzenie

20–32: Zapisz wzór, wyznacz etap 10 i sprawdź, czy 70 może być liczbą kropek.

Wsparcie: Zapisz etap jako numer 1 plus przyrosty.

Pogłębienie: Zbuduj inną regułę pasującą tylko do pierwszych dwóch wartości.

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia: Ile kropek w **etapie 7?**



Odpowiedzi i kontrola: Etap 10: 42; 70 w etapie 17; bilet 30.
Pogłębienie: Np. $4n+2+(n-1)(n-2)$ pasuje do etapów 1 i 2, ale nie wyznacza tej samej dalszej reguły.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L004 • Jednostka i dokładność

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Podajesz pomiar z jednostką i uzasadnioną dokładnością.

Wiadomości wstępne: centymetry, milimetry, zaokrąglanie

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

Pasek ma 137 mm, więc 13,7 cm; zaokrąglony 14 cm.



0 min — 5 min — 12 min — 20 min

0–5

poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12

wspólny model. Pasek ma 137 mm, więc 13,7 cm; zaokrąglony 14 cm.

12–20

uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L004 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

20–32: Przelicz 73 mm i 2,45 m na cm. Podaj najmniejszą działkę swojej linijki.

Wsparcie: Narysuj tabelę m–cm–mm.

Pogłębienie: Podaj zakres wyników do 0,1 cm zaokrąglanych do 19 cm.

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia: Zapisz 186 mm w cm.

Odpowiedzi i kontrola: 7,3 cm; 245 cm. Przy podziałce milimetrowej najmniejsza działka to 1 mm. Bilet: 18,6 cm. Pogłębienie: 18,5–19,4 cm z krokiem 0,1 cm.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

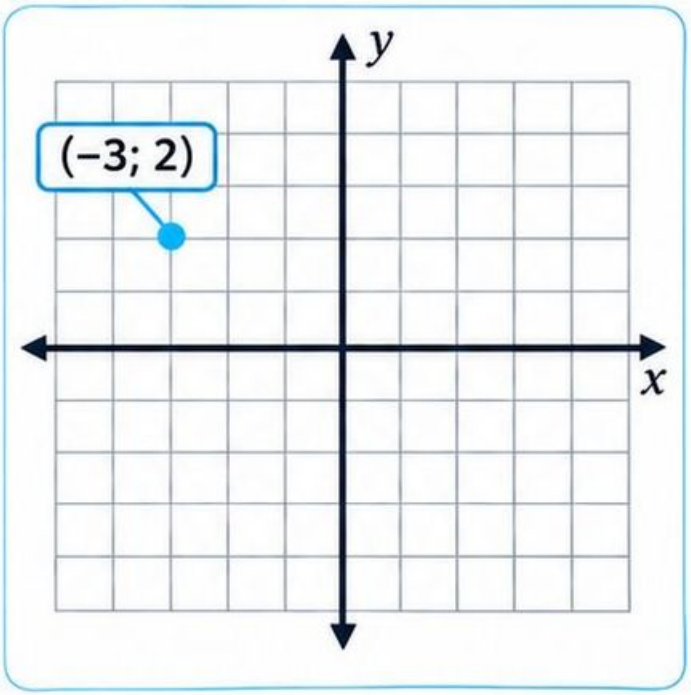
L005 • Punkt z dwóch informacji

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Odczytujesz współrzędne we właściwej kolejności.

Wiadomości wstępne:
oś liczbowa i liczby ujemne

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

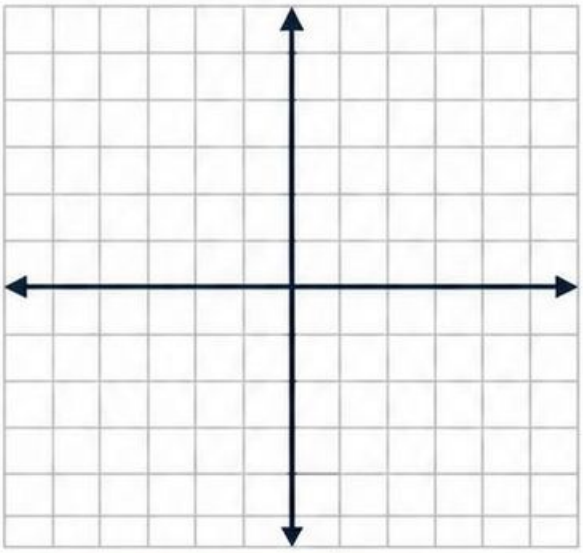
5–12: wspólny model. Zaznacz (−3; 2): najpierw poziomo, potem pionowo.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L005 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

20–32: Zaznacz (2; −4), (−1; −3), a potem odbij je względem osi *x*.



Wsparcie:

Podpisz osie i kierunki dodatnie.

Pogłębienie:

Wyjaśnij działanie odbicia względem obu osi kolejno.

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia:

Odbij (−2; 5) względem osi *y*.

Odpowiedzi i kontrola: Odbicia (2; 4), (−1; 3); bilet (2; 5).
Pogłębienie: Kolejne odbicia w obu osiach dają $(x, y) \to (-x, -y)$.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie;
poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę;
błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L006 • Pytanie badawcze bez sugestii

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Projektujesz neutralne pytanie i anonimowy zapis.

Wiadomości wstępne: jednostki i liczenie danych

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model (przykład)



Pytanie: „Ile minut trwał dzisiejszy dojazd?"
Określa jednostkę (minuta) i okres (dzisiejszy dojazd).

Plan lekcji: 0–20 minut



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. Pytanie „Ile minut trwał dzisiejszy dojazd?" określa jednostkę i okres.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

Miejsce na zapis

L006 • Praktyka i sprawdzenie

20–32: Popraw „Czy wszyscy lubią naszą świetną bibliotekę?”. Zaproponuj próbę obejmującą różne klasy.

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45: • **Bilet wyjścia:** Czy ankieta samego koła czytelniczego reprezentuje szkołę?

Wsparcie: Oddziel opinię od czasu lub liczebności.

Pogłębienie: Wskaż, czego nie da się ustalić z samej deklaracji ucznia.

Miejsce na Twoje rozwiązania

Bilet wyjścia

Czy ankieta samego koła czytelniczego reprezentuje szkołę?

Odpowiedzi i kontrola:

Np. „Jak oceniasz bibliotekę?” z neutralnymi odpowiedziami; bilet nie, możliwe obciążenie próby. Pogłębienie: Deklaracja nie dowodzi czasu zmierzonego niezależnym przyrządem.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L007 • Dodawanie z kontrolą

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Dodajesz i odejmujesz, sprawdzając wynik działaniem odwrotnym.

Wiadomości wstępne: wartość pozycyjna

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model – przykład

$$674 + 258 = 932;$$
$$932 - 258 = 674.$$

Plan 0–20 minut

0 — 5 — 12 — 20

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. 674+258=932; 932−258=674.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L007 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

Oblicz 1856+479 i 2304−867. Wymień typ błędu wykrywany przez szacunek.

Wsparcie: Zapisuj cyfry w tych samych kolumnach.

Pogłębienie: Wyjaśnij, dlaczego zgodny szacunek nie gwarantuje dokładnego wyniku.

32–39

porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

Bilet wyjścia: **Oblicz 709−286.**

Odpowiedzi i kontrola: 2335; 1437. Szacunek może wykryć np. pominięcie setki. Bilet: 423. Pogłębienie: Np. 200 i 202 mogą dawać ten sam szacunek do setek.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L008 • Jaki procent oznacza pole

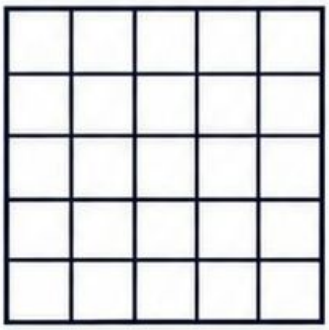
Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Dobierasz wartość pola do liczby pól całości.

Wiadomości wstępne:
ułamki równe i setne

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model: siatka pól



Siatka ma 25 równych pól.

Jedno oznacza 4%, a nie 1%.

0 — 5 — 12 — 20

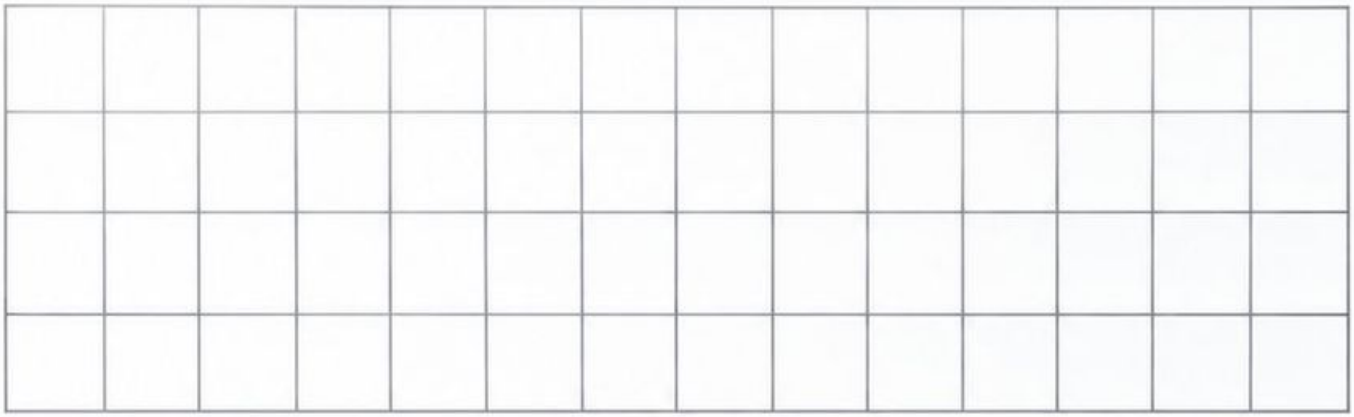
0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. Siatka ma 25 równych pól. Jedno oznacza 4%, a nie 1%.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L008 • Praktyka i sprawdzenie

20–32: Narysuj 20 pól i zaznacz 35%. Porównaj z 35 polami na siatce 100.



Wsparcie:

Najpierw wyznacz udział jednego pola.

Pogłębienie:

Znajdź wielkość siatki, w której 12 pól to 15%.

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia:

Ile procent stanowi 9 z 30 równych pól?

Odpowiedzi i kontrola:

Na 20 polach 7; na 100 polach 35; bilet 30%.
Pogłębienie: Siatka 80 pól: 12/80=15%.

Decyzja:

poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L009 • Podstawiaj z nawiasem

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Obliczasz wyrażenie z ujemną wartością zmiennej.

Wiadomości wstępne: potęgowanie i działania na ujemnych

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model

Dla $a=-2$ mamy $3a^2-a=12+2=14$.

Plan (0–20 minut)

- **0–5:** poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.
- **5–12:** wspólny model. Dla $a=-2$ mamy $3a^2-a=12+2=14$.
- **12–20:** uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L009 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

Oblicz $2x^2+3x$ dla $x=-3$ i 4.
Porównaj x^2 z $-x^2$.

Wsparcie: Zapisz ujemną wartość w nawiasie.

Pogłębienie: Kiedy $x^2=-x^2$? Tylko dla $x=0$.

32–39

porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

Bilet wyjścia: Oblicz x^2-2x dla $x=-4$.

Odpowiedzi i kontrola: 9 i 44; bilet 24. Pogłębienie: Tylko $x=0$.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L010 • Kąty przy przecinających się prostych

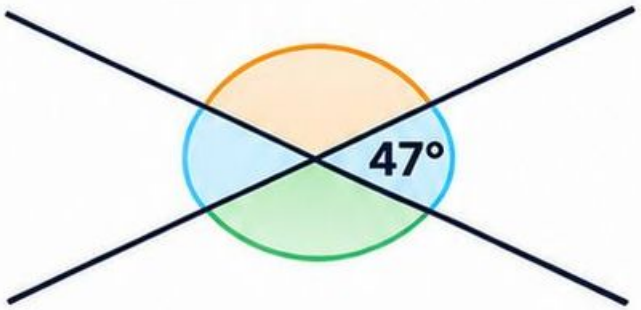
Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Używasz równości kątów wierzchołkowych i sumy przyległych.

Wiadomości wstępne: kąt prosty i półpełny

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model – przecięcie prostych



Przy kącie 47° kąt przyległy ma 133°, wierzchołkowy 47°.

Oś czasu (0–20 minut)

0 — 5 — 12 — 20

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. Przy kącie 47° kąt przyległy ma 133°, wierzchołkowy 47°.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L010 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

20–32: Narysuj przecięcie prostych z kątem 72°. Podpisz wszystkie cztery kąty.

Wsparcie: Oznacz jedną wspólną prostą i sumę 180°.

Pogłębienie: Czy wszystkie kąty mogą być równe? Tak, po 90°.

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia: Jaki kąt przyległy do 118°?

Odpowiedzi i kontrola: 72°, 108°, 72°, 108°; bilet 62°. Pogłębienie: Tak, cztery kąty po 90°.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L011 • Tabela zależności

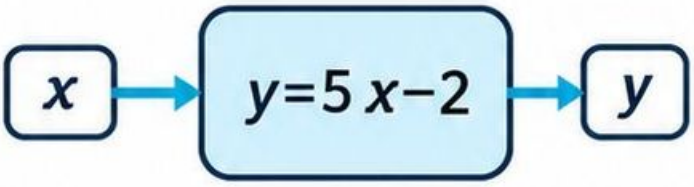
Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Łączysz regułę z tabelą i interpretacją.

Wiadomości wstępne:
mnożenie i pary liczb

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model: tabela zależności



Maszyna $y=5x-2$ daje dla $x=0; 1; 2$ wartości $-2; 3; 8$.

x	0	1	2
y	−2	3	8

- **0–5:** poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.
- **5–12:** wspólny model. Maszyna $y=5x-2$ daje dla $x=0; 1; 2$ wartości $-2; 3; 8$.
- **12–20:** uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L011 • Praktyka i sprawdzenie

20–32: **Uzupełnij dla $x=3; 4$, odtwórz wejście dla $y=28$.**

Wsparcie: Zapisz oddzielnie mnożenie i odejmowanie.

Pogłębienie: Czy jedna para wyznacza jednoznacznie regułę? Podaj inną.

32–39: **porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.**

39–42: **uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.**

42–45 • **Bilet wyjścia: Jakie y dla $x=-1$?**

Miejsce na rozwiązania

Odpowiedzi i kontrola: 13; 18; wejście 6; bilet −7. Pogłębienie: Np. para (0; −2) pasuje do $y=5x-2$ i $y=x-2$; jedna para nie wystarcza.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L012 • Tabela liczebności

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Tworzysz tabelę z kompletnymi kategoriami i kontrolą sumy.

Wiadomości wstępne: porządkowanie liczb

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model – tabela liczebności

Dane: 0; 1; 1; 2; 0; 3 →

Wartość	0	1	2	3
Liczebność	2	2	1	1

Harmonogram (0–20 minut)

0–5

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12

5–12: wspólny model. Dane 0; 1; 1; 2; 0; 3 dają liczebności 2; 2; 1; 1.

12–20

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L012 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

Opracuj 2; 1; 2; 3; 0; 2; 1; 3; 3; 3. Wyznacz częstość wyniku 3.

Wsparcie: Wykreślaj odnotowane dane po jednym.

Pogłębienie: Dodaj dane tak, aby częstość 3 wyniosła 1/2.

32–39

porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

Bilet wyjścia: Czy wartość z liczebnością 0 można pominąć, gdy opisujemy wszystkie wyniki kostki?

Odpowiedzi i kontrola: Liczebności 0: 1; 1; 2; 2; 3; 3: 4; częstość 0,4; bilet nie. Pogłębienie: Dodaj dwa wyniki 3: 6/12=1/2.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L013 • Mnożenie i dzielenie jako grupowanie

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Łączysz iloczyn z modelem grup i dzielenie z kontrolą.

Wiadomości wstępne: dodawanie równych składników

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model – grupowanie

7 paczek po 12 kredek daje 84; iloraz 84:7=12.



Plan (0–20 minut)

0–5
poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12
wspólny model.
7 paczek po 12 kredek daje 84; iloraz 84:7=12.

12–20
uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L013 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 Rozdziel 96 żetonów w grupy po 8, a potem po 6. Opisz różnicę liczby grup i ich wielkości.

32–39 porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42 uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

Wsparcie:

Rysuj prostokątne układy.

Pogłębienie:

Wybierz wszystkie możliwe liczby równych grup dla 24 elementów.

42–45 • Bilet wyjścia:

Ile grup po 9 w 117?

Odpowiedzi i kontrola: 12 grup po 8; 16 grup po 6; bilet 13.
Pogłębienie: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24 równych grup.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L014 • Trzy zapisy udziału

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Zamieniasz zapis bez mylenia liczby z procentem.

Wiadomości wstępne:
ułamki dziesiętne i równe

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Plan 0–20 minut

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. 3/8=0,375=37,5%.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

Miejsce na zapis i model

L014 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

Zamień 0,04; 7/20; 1,2 na procenty i 18%; 0,2% na liczby.

Wsparcie: Wróć do 1%=1/100.

Pogłębienie: Wyjaśnij znaczenie procentu większego niż 100.

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia: Zapisz 0,075 procentem.

Odpowiedzi i kontrola: 4%; 35%; 120%; 0,18; 0,002; bilet 7,5%. **Pogłębienie:** Np. 120% to 1,2 całości.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L015 • Wyrazy podobne

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Redukujesz tylko wyrazy o identycznej części literowej.

Wiadomości wstępne: składniki sumy i współczynniki

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

$$3x+4y-x+2y=2x+6y.$$

Plan 0–20 minut

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. $3x+4y-x+2y=2x+6y$.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L015 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

20–32: Uprość $5a-2b+3a+7b$ oraz $4x^2-x+2x^2+6x$.

Wsparcie: Oznacz typy wyrazów różnymi podkreśleniami.

Pogłębienie: Dla jakich wartości $5x+2x^2$ jest równe $7x$? *$x=0$ lub 1.*

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia:
Uprość $7m+2-3m-9$.

Odpowiedzi i kontrola: $8a+5b$; $6x^2+5x$; bilet $4m-7$.
Pogłębienie: $x=0$ lub 1.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L016 • Kiedy powstaje trójkąt

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Sprawdzasz nierówność trójkąta przed rysowaniem.

Model



Dla 4; 5; 10 cm mamy $4+5<10$; trójkąt nie istnieje.

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Plan lekcji (0–20 minut)

- **0–5:** poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.
- **5–12:** wspólny model. Dla 4; 5; 10 cm mamy $4+5<10$; trójkąt nie istnieje.
- **12–20:** uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

Wiadoności wstępne:
dodawanie długości

Kryterium sukcesu:
Sprawdzasz nierówność trójkąta przed rysowaniem.

L016 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 Oceń 3; 7; 8 oraz 3; 7; 10. Zapisz warunek dla najdłuższego boku.

32–39 porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42 uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 **Bilet wyjścia:** Czy 5; 5; 9 mogą tworzyć trójkąt?

Ćwiczenie

Wsparcie: Ułóż odcinki w kolejności rosnącej.

Pogłębienie: Podaj wszystkie całkowite trzecie boki dla 3 i 7 cm: 5–9 cm.

Bilet wyjścia

Czy 5; 5; 9 mogą tworzyć trójkąt?

Odpowiedzi i kontrola

Odpowiedzi i kontrola: Pierwszy tak, drugi nie; bilet tak.

Pogłębienie: Trzeci bok całkowity: 5; 6; 7; 8 lub 9 cm.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L017 • Wykres opowiada o czasie

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Interpretujesz poziomy odcinek wykresu drogi jako postój.

Wiadomości wstępne:
osie i jednostki

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.



czas w minutach

0 — 5 — 12 — 20

0–5:
poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12:
wspólny model. Oś pozioma: czas w h; pionowa: przebyta droga w km. Model przechodzi przez (0; 0), (1; 5), (2; 5), (3; 9); postój trwa od 1 do 2 h.

12–20:
uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L017 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

Narysuj model; oblicz całą drogę i średnią z 3 godzin.



Wsparcie: Podpisz zmienną na każdej osi.

Pogłębienie: Czy poziomy wykres temperatury oznacza postój podróżnego? **Nie.**

32–39

porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia:

Co oznacza poziomy odcinek na wykresie drogi?

_____

_____

Odpowiedzi i kontrola: 9 km; średnia 3 km/h; bilet postój.
Pogłębienie: Nie; stała temperatura nie określa ruchu.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L018 • Wykres słupkowy bez zniekształceń

Klasy 4–6 • 45 minut

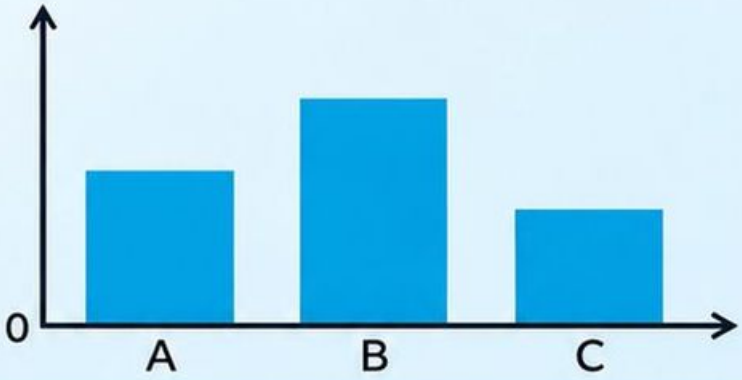
Cel i kryterium sukcesu:
Rysujesz słupki o wspólnej skali i szerokości.

Wiadomości wstępne:
tabela liczebności

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

Kategoria	Liczebność
A	8
B	12
C	6



Plan lekcji (0–20 minut)

0 — 5 — 12 — 20

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. Dane A=8, B=12, C=6 przedstaw na osi od 0.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L018 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

20–32: Narysuj, podaj sumę i różnicę B–C. Wyjaśnij rolę jednakowych szerokości.

Wsparcie: Zaznacz podziałkę co 2 jednostki.

Pogłębienie: Narysuj oś od 5 i opisz, jak zmienia się wizualne wrażenie.

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia: O ile B przewyższa A?

Odpowiedzi i kontrola: Suma 26; różnica 6; bilet 4. Pogłębienie: Oś od 5 wyolbrzymia proporcje wysokości słupków.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L019 • Kolejność działań

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Wyjaśniasz wpływ nawiasów na strukturę obliczenia.

Wiadomości wstępne: cztery działania i nawiasy

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model

$$8+4\times3=20;$$

$$(8+4)\times3=36.$$

Plan (0–20 minut)

0 — 5 — 12 — 20

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. $8+4\times3=20$; $(8+4)\times3=36$.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L019 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

Oblicz 30−12:3 i (30−12): 3. Napisz dwie historie pasujące do zapisów.

Wsparcie: Podkreśl działanie wykonywane pierwsze.

Pogłębienie: Gdzie umieścić nawiasy w 6+2×5, aby otrzymać 40?

32–39

porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

Bilet wyjścia: Oblicz 6+2×5−3.

Odpowiedzi i kontrola: 26 i 6; bilet 13.
Pogłębienie: (6+2)·5=40.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L020 • Procent konkretnej liczby

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Obliczasz część i odróżniasz ją od pozostałej całości.

Wiadomości wstępne: zamiana procentu na liczbę.

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model – przykład

$35\% \text{ z } 160 = 0{,}35 \times 160 = 56.$



0–20 minut

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. $35\% \text{ z } 160 = 0{,}35 \times 160 = 56.$

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L020 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 **Wyznacz 15% z 240 i 12,5% z 96; porównaj wygodne metody.**

Wsparcie: Rozbij procent na 10% i 5%.

Pogłębienie: Zaproponuj dwa różne procenty i całości dające tę samą część 30.

32–39 porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42 uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia:
Ile zostaje z 500 po wydaniu 18%?

Odpowiedzi i kontrola: 36; 12; bilet 410.
Pogłębienie: 10% z 300 i 20% z 150 dają 30.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L021 • Rozdzielność mnożenia

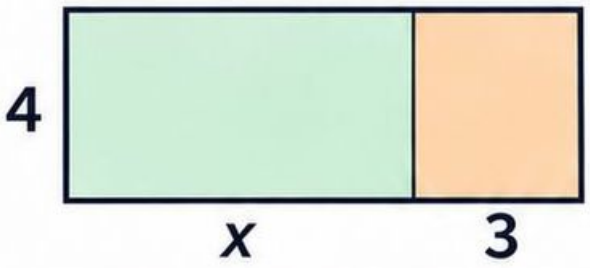
Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Łączysz model pola z rozdzielnością i znakami.

Wiadomości wstępne: mnożenie i sumy

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model



Pole prostokąta

$$4\times(x+3)=4x+12$$

dla $x>0$.

0 — 5 — 12 — 20 minut

0–5:
poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12:
wspólny model. Pole prostokąta $4\times(x+3)=4x+12$ dla $x>0$.

12–20:
uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L021 • Praktyka i sprawdzenie

20–32	32–39	39–42	42–45
Rozwiń $5(2x-3)$ i $-2(x+6)$, potem oblicz dla $x=4$.	porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.	uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.	Bilet wyjścia: Rozwiń $3(2a-5)$.

Praktyka

Rozwiń $5(2x-3)$ i $-2(x+6)$, potem oblicz dla $x=4$.

Wsparcie: Rysuj strzałkę od czynnika do każdego składnika.

Pogłębienie: Wyjaśnij, dlaczego $-2(x-3)=-2x+6$.

Bilet wyjścia:

Rozwiń $3(2a-5)$.

Odpowiedzi i kontrola: $10x-15$ wartość 25; $-2x-12$ wartość -20; bilet $6a-15$. Pogłębienie: $-2(x-3)=-2x+6$, bo $(-2)\cdot(-3)=6$.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L022 • Rodzina czworokątów

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Uzasadniasz, że kwadrat jest prostokątem i rombem.

Wiadomości wstępne: boki i kąty proste

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model – definicje i przykłady

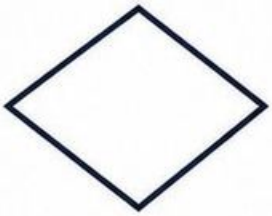
Prostokąt

Czworokąt, który ma cztery kąty proste.



Romb

Czworokąt, który ma cztery boki równej długości.



Kwadrat

Czworokąt, który ma cztery kąty proste i cztery boki równej długości.



Przebieg (0–20 minut)

0–5

poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12

wspólny model. Porównaj definicje prostokąta, rombu i kwadratu, rysując po jednym przykładzie.

12–20

uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L022 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 **Klasyfikuj kwadrat, romb o kącie 60° i prostokąt 2×5. Wskaż cechy wspólne.**



Wsparcie: Zapisz listę wymaganych cech zamiast oceny wyglądu.

Pogłębienie: Podaj figurę będącą jednocześnie prostokątem i rombem.

32–39 **porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.**

39–42 **uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.**

42–45 **Bilet wyjścia:** Czy każdy romb jest prostokątem?

Odpowiedzi i kontrola: Kwadrat jest prostokątem i rombem; romb o kącie 60° nie jest prostokątem, a prostokąt 2×5 nie jest rombem. Wszystkie są równoległobokami. Bilet: nie, romb 60° nie ma czterech kątów prostych. Pogłębienie: Kwadrat.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L023 • Prosta proporcjonalność na wykresie

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Rozpoznajesz stały iloraz i zerową wartość dla zera.

Wiadomości wstępne: tabela i iloraz *y*

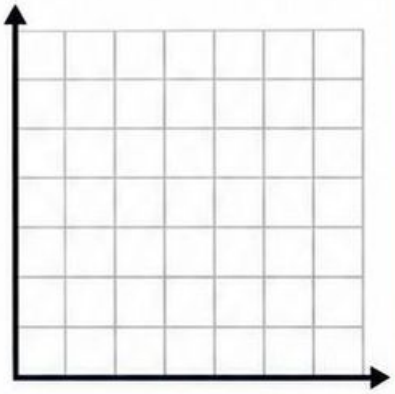
Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model



Towar 9 zł/kg daje $y=9x$.

x (kg)	0	1	2
y (zł)	0	9	18



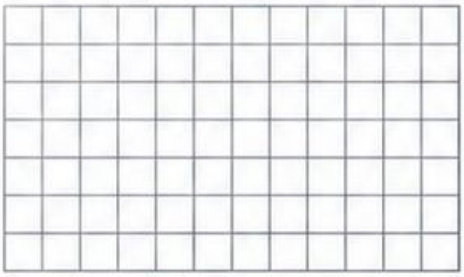
0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. Towar 9 zł/kg daje $y=9x$, tabela 0; 1; 2 kg → 0; 9; 18 zł.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L023 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 **Narysuj koszt dla 0–4 kg i porównaj z y=9 x+5.**



Wsparcie:

Oblicz y/x dla 1 i 2 kg.

Pogłębienie:

Dlaczego sama prostoliniowość wykresu nie wystarcza?

32–39 **porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.**

39–42 **uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.**

42–45 • **Bilet wyjścia: Czy opłata stała 5 zł zachowuje proporcjonalność prostą?**

Odpowiedzi i kontrola:

Dla x=0; 1; 2; 3; 4: koszty 0; 9; 18; 27; 36; z opłatą 5 zł: 5; 14; 23; 32; 41. Bilet: nie; drugi wykres nie przechodzi przez (0; 0), a iloraz koszt/masa nie jest stały. Pogłębienie: Prosta z niezerowym wyrazem wolnym nie ma stałego ilorazu y/x dla x≠0.

Decyzja:

poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L024 • Koło opisuje całość

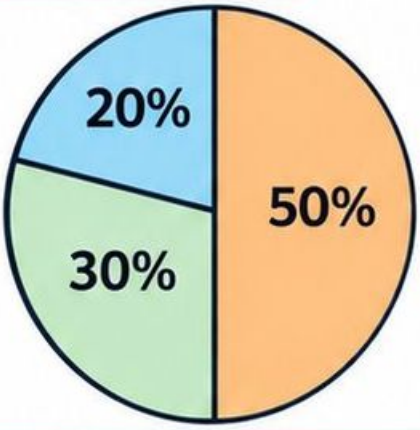
Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Obliczasz kąty sektorów dla rozłącznych udziałów.

Wiadomości wstępne: procenty i kąty

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model



Udziały 20%; 30%; 50% odpowiadają 72°; 108°; 180°.

0–5 poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12 wspólny model. Udziały 20%; 30%; 50% odpowiadają 72°; 108°; 180°.

12–20 uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L024 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

20–32: Podziel 24 osoby na 6; 8; 10; wyznacz kąty i kontrolę sumy.

Wsparcie: Zacznij od 1%=3,6°.

Pogłębienie: Czy wielokrotne odpowiedzi osoby nadają się zawsze do jednego koła?

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia: Jaki kąt odpowiada 35%?

Odpowiedzi i kontrola: 90°; 120°; 150°; bilet 126°.
Pogłębienie: Nie; odpowiedzi wielokrotnego wyboru mogą się nakładać.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L025 • Wielokrotności i dzielniki

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Rozróżniasz dzielnik i wielokrotność na przykładach.

Wiadomości wstępne: mnożenie i dzielenie

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

Dzielniki 18: 1; 2; 3; 6; 9; 18

Wielokrotności 18 zaczynają: 18; 36; 54

0 — 5 — 12 — 20

0–5

poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12

wspólny model. Dzielniki 18: 1; 2; 3; 6; 9; 18; wielokrotności 18 zaczynają 18; 36; 54.

12–20

uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L025 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 Znajdź dodatnie wspólne wielokrotności 4 i 6 do 50 oraz wspólne dzielniki 24 i 36.

32–39 porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42 uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

Ćwiczenia

Wsparcie: Rozpisz osobne listy i zaznacz część wspólną.

Pogłębienie: Wyjaśnij różnicę roli NWW i NWD w dwóch sytuacjach praktycznych.

42–45 • Bilet wyjścia: Jaka najmniejsza dodatnia wspólna wielokrotność 6 i 8?

Odpowiedzi i kontrola

Odpowiedzi i kontrola: 12; 24; 36; 48; dzielniki 1; 2; 3; 4; 6; 12; bilet 24.

Pogłębienie: NWW: powtarzające się zdarzenia; NWD: maksymalna liczba równych zestawów.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L026 • Odtwórz całość z udziału

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Wyznaczasz całość, nie mnożąc ponownie przez procent.

Wiadomości wstępne: procent liczby i dzielenie

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

30% to 72 → **całość 72:0,3=240**

0–5

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12

5–12: wspólny model. Jeśli 30% to 72, całość 72:0,3=240.

12–20

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L026 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

20–32: Znajdź liczbę, której 12% to 54, oraz budżet, gdy po wydaniu 25% zostało 180 zł.

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia: 18 to 15% jakiej liczby?

Praktyka

Wsparcie: Najpierw wyznacz 1% lub pozostały procent.

Pogłębienie: Wyjaśnij, dlaczego dodatnia całość musi przewyższać część przy $0<p<100$.

Bilet wyjścia: 18 to 15% jakiej liczby?

Odpowiedzi i kontrola: 450; budżet 240; bilet 120. **Pogłębienie:** Dla dodatniej całości mnożenie przez $p/100 \in (0; 1)$ daje mniejszą część.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

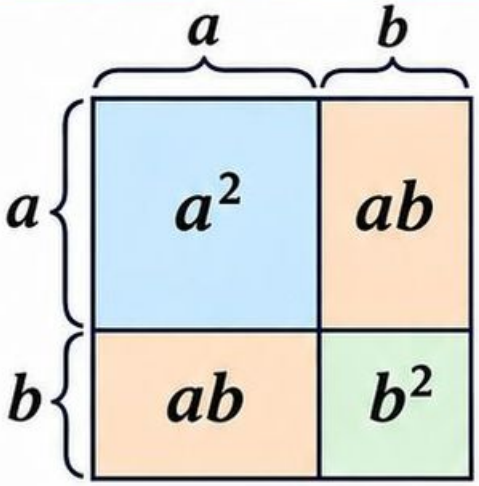
L027 • Kwadrat sumy i różnica kwadratów

Liceum i technikum • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Rozwijasz wzór z brakującym składnikiem środkowym.

Wiadomości wstępne: rozdzielność i pola

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

0 min

5 min

12 min

20 min



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. Kwadrat $(a+b)^2$ składa się z a^2, dwóch ab oraz b^2.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L027 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

Rozwiń $(x+4)^2$, $(2x-1)^2$ i $(x-6)(x+6)$.

32–39

porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

Bilet wyjścia: Rozwiń $(3a+2)^2$.

Praktyka

20–32: Rozwiń $(x+4)^2$, $(2x-1)^2$ i $(x-6)(x+6)$.

Wsparcie:

Rozpisz mnożenie dwóch nawiasów.

Pogłębienie:

Znajdź kontrprzykład dla $(a+b)^2=a^2+b^2$.

Bilet wyjścia

42–45 • Bilet wyjścia: Rozwiń $(3a+2)^2$.

Odpowiedzi i kontrola:

$x^2+8x+16$; $4x^2-4x+1$; x^2-36; bilet $9a^2+12a+4$.
Pogłębienie: $a=b=1$: lewa 4, prawa 2.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L028 • Obwód figury złożonej

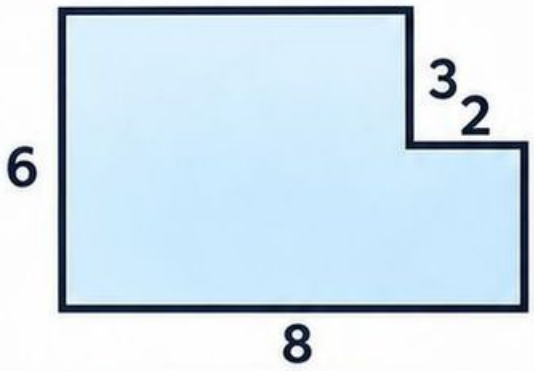
Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Śledzisz granicę bez wliczania odcinków wewnętrznych.

Wiadomości wstępne:
suma długości boków

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model



Z prostokąta 8×6 wytnij narożnik 2×3; obwód nadal 28.

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. Z prostokąta 8×6 wytnij narożnik 2×3; obwód nadal 28.

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

0 min — 20 min

L028 • Praktyka i sprawdzenie

20–32



32–39



32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

20–32: Narysuj podobną figurę z 10×7 i narożnikiem 4×2. Podpisz każdy odcinek granicy.

Wsparcie: Zaznacz trasę po granicy jednym kolorem.

Pogłębienie: Jak obwód zmieni wycięcie w środku boku zamiast w rogu?



42–45 • Bilet wyjścia: Jaki obwód ma pierwotny prostokąt 10×7?



Odpowiedzi i kontrola: Po wycięciu górnego prawego narożnika szerokości 4 i głębokości 2 granica ma odcinki 10; 5; 4; 2; 6; 7; obwód 34 jednostki. Bilet: 34. Pogłębienie: Wcięcie wewnątrz boku zwiększa obwód o 2 d, gdzie d to głębokość; dla d=2 daje 38.



Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L029 • Funkcja i jej dopuszczalne wejścia

Liceum i technikum • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Rozróżniasz dziedzinę i zbiór wartości.

Wiadomości wstępne: przyporządkowanie i kwadrat liczby

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model – funkcja

Dla $x \in \{-2; 0; 3\}$ i $y = x^2$ mamy

$D = \{-2; 0; 3\}$, $W = \{0; 4; 9\}$.

0 min — **5 min** — **12 min** — **20 min**



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. Dla $x \in \{-2; 0; 3\}$ i $y = x^2$ mamy $D = \{-2; 0; 3\}$, $W = \{0; 4; 9\}$.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L029 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 **20–32:** Wyznacz D i W dla przyporządkowania 1→5; 2→5; 4→8. Oceń powtarzanie wyjścia.

32–39 **32–39:** porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42 **39–42:** uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 **42–45 • Bilet wyjścia:** Czy pary (1; 2), (1; 3) tworzą funkcję?

Wsparcie:

Zbuduj diagram strzałek.

Pogłębienie:

Wyznacz dziedzinę $1/(x-4)$: wszystkie rzeczywiste poza 4.

Miejsce na ćwiczenia

Bilet wyjścia

Czy pary (1; 2), (1; 3) tworzą funkcję?

Odpowiedzi i kontrola: D={1; 2; 4}; W={5; 8}; bilet nie, jedno wejście ma dwa wyjścia. Pogłębienie: $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 4$.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L030 • Średnia jako wyrównanie

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:

Obliczasz średnią i interpretujesz jej możliwą nieobecność w danych.

Wiadomości wstępne:

suma i liczba danych

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

0 min — **5 min** — **12 min** — **20 min**



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. Dane 2; 4; 7; 11 mają sumę 24 i średnią 6, choć 6 nie występuje.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

Wspólny model:

Dane 2; 4; 7; 11 mają sumę 24 i średnią 6, choć 6 nie występuje.

L030 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 Oblicz średnie 3; 8; 10 oraz −2; 4; 7. Dodaj 5 do każdej wartości i porównaj.

Wsparcie:
Wyrównaj wieże z żetonów.

Pogłębienie:
Podaj dwa różne zbiory o tej samej średniej.

32–39 porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42 uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45
- **Bilet wyjścia:** Średnia 4 liczb to 9. Trzy sumują się do 25. Jaka czwarta?

Odpowiedzi i kontrola: 7 i 3; po dodaniu 5 średnie 12 i 8; bilet 11. Pogłębienie: Np. dane 1; 3 oraz 0; 2; 4 mają średnią 2.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L031 • Podzielność bez długiego dzielenia

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Uzasadniasz decyzję właściwym kryterium podzielności.

Wiadomości wstępne: cyfry i dzielenie z resztą

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model

Dla 342 suma cyfr 9, więc podzielność przez 3 i 9; ostatnia cyfra 2 daje przez 2.

0 min



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5 min



5–12: wspólny model. Dla 342 suma cyfr 9, więc podzielność przez 3 i 9; ostatnia cyfra 2 daje przez 2.

12 min



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

20 min

L031 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 | 32–39 | 39–42 | 42–45

20–32: **Zbadaj 450; 627; 1105 dla 2; 3; 5; 9 i 10.**

Wsparcie: Oddziel kryterium ostatniej cyfry od sumy cyfr.

Pogłębienie: Znajdź brakującą cyfrę w 4□2 dla podzielności przez 9: 3.

32–39: **porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.**

39–42: **uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.**

42–45 • Bilet wyjścia: Czy 738 jest podzielne przez 9?

Odpowiedzi i kontrola: 450: wszystkie wskazane; 627: 3; 1105: 5; bilet tak, suma 18. Pogłębienie: Cyfra 3 daje 432.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L032 • Wybierz podstawę porównania

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Porównujesz wzrost i spadek z różnymi podstawami.

Wiadomości wstępne: procent liczby

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

80→100 to 25% wzrostu;
100→80 to 20% spadku.

0–5 **5–12** **12–20**



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. 80→100 to 25% wzrostu; 100→80 to 20% spadku.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L032 • Praktyka i sprawdzenie



20–32 **20–32: Porównaj 120 i 180 w obu kierunkach. Wskaż mianownik każdego ilorazu.**

32–39 **32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.**

39–42 **39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.**

42–45 **42–45 • Bilet wyjścia: O ile procent 90 jest mniejsze od 120?**

Wsparcie:

Napisz „względem której liczby?”

Pogłębienie:

Wyjaśnij, dlaczego przeciwne zmiany nie mają tych samych procentów.

Miejsce na pracę:

Odpowiedzi i kontrola: 180 większe o 50%; 120 mniejsze o 33⅓%; bilet 25%. Pogłębienie: W obu kierunkach inna liczba jest podstawą procentu.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L033 • Wyłącz wspólny czynnik

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Zapisujesz sumę jako iloczyn i sprawdzasz rozwinięciem.

Wiadomości wstępne: rozdzielność mnożenia

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

0 — 5 — 12 — 20



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model.

$8x+20=4(2x+5)$.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L033 • Praktyka i sprawdzenie



20–32: Rozłóż $12a^2+18a$ oraz $15x-25$. Sprawdź wymnożeniem.

Wsparcie: Najpierw znajdź wspólny liczbowy dzielnik.

Pogłębienie: Który czynnik można dodatkowo wyłączyć, gdy oba wyrazy zawierają a?

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia: Rozłóż $6y+9$.

Odpowiedzi i kontrola: $6a(2a+3)$; $5(3x-5)$; bilet $3(2y+3)$.
Pogłębienie: Czynnik a.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L034 • Pole prostokąta i równoległoboku

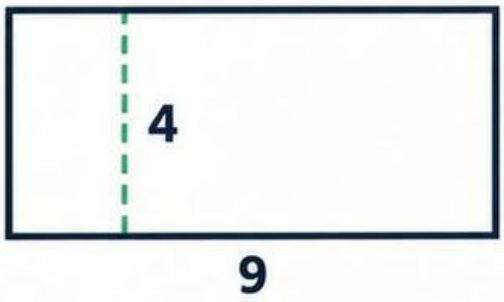
Klasy 7–8 • 45 minut

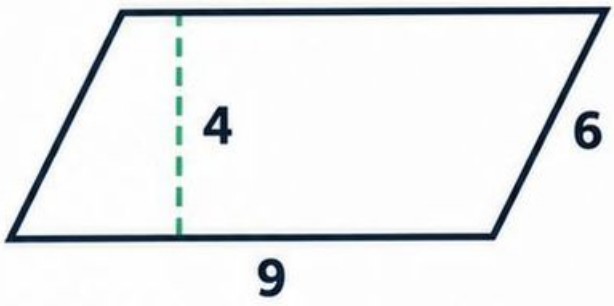
Cel i kryterium sukcesu:
Dobierasz wysokość do wybranej podstawy.

Wiadomości wstępne: jednostka pola i prostopadłość

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model





Podstawa 9, wysokość 4, bok ukośny 6 dają pole 36, nie 54.

Przebieg lekcji (0–20 minut)



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. Podstawa 9, wysokość 4, bok ukośny 6 dają pole 36, nie 54.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L034 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

20–32: Oblicz pole prostokąta o bokach 3,2 m i 2,5 m oraz pole równoległoboku o podstawie 14 cm i wysokości 5 cm.





Wsparcie: Zaznacz kąt prosty wysokości.

Pogłębienie: Przy stałym polu podwój podstawę i wyznacz zmianę wysokości.

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia: Pole równoległoboku 48 cm^2, podstawa 8 cm. Jaka wysokość?

Odpowiedzi i kontrola: 8 m^2; 70 cm^2; bilet 6 cm.
Pogłębienie: Wysokość maleje dwukrotnie.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojeciowy — powrót do modelu.

L035 • Miejsce zerowe i znak funkcji

Liceum i technikum • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Oddzielasz zero funkcji od wartości przy zerowym argumencie.

Wiadomości wstępne: równanie liniowe i wykres

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model – wspólny przykład

Dla $f(x) = 2x - 6$ zero to 3, a $f(0) = -6$.

Plan lekcji: 0–20 minut

0 — 5 — 12 — 20

0–5:

poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12:

wspólny model. Dla $f(x) = 2x - 6$ zero to 3, a $f(0) = -6$.

12–20:

uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L035 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 **Wyznacz zero i przedziały znaku $g(x)=-3x+12$. Naszkicuj.**

32–39 **porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.**

39–42 **uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.**

42–45 **• Bilet wyjścia: Kiedy $x+5$ jest ujemne?**

Wsparcie: Rozwiąż najpierw $f(x)=0$.

Pogłębienie: Czy mnożenie funkcji przez −1 zmieni zero? Nie, odwróci znaki.

Bilet wyjścia: Kiedy $x+5$ jest ujemne?

Odpowiedzi i kontrola:

g: zero 4, dodatnia dla $x<4$, ujemna $x>4$; bilet $x<-5$. Pogłębienie: Nie zmienia zer; odwraca znaki niezerowych wartości.

Decyzja:

poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L036 • Mediana po uporządkowaniu

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Wyznaczasz medianę dla obu liczebności szeregu.

Wiadomości wstępne: porządkowanie i średnia dwóch liczb

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

Dane 9; 2; 6; 4 → 2; 4; 6; 9; mediana 5.

0 min — **5 min** — **12 min** — **20 min**



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. Dane 9; 2; 6; 4 → 2; 4; 6; 9; mediana 5.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L036 • Praktyka i sprawdzenie

20–32



20–32: Znajdź medianę 8; 1; 5; 3; 7 oraz 2; 2; 4; 8; 10; 12.

Wsparcie: Skreślaj parami skrajne wartości.

Pogłębienie: Zmień największą liczbę 100 razy i sprawdź, czy mediana się zmienia.

32–39



32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42



39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45



42–45 • Bilet wyjścia: Jaka mediana 1; 9; 4; 6?



Odpowiedzi i kontrola: Pierwsza 5; druga 6; bilet 5.
Pogłębienie: Nie zmienia median 5 i 6 w podanych zestawach.



Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L037 • Liczba pierwsza a rozkład

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Rozróżniasz liczby pierwsze, złożone i liczbę 1.

Wiadomości wstępne:
dzielniki naturalne

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

0 — 5 — 12 — 20



0–5:
poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12:
wspólny model.
13 ma dokładnie dwa dodatnie dzielniki;
$12=2^2\times3$;
1 tylko jeden.



12–20:
uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

Model wspólny

13 ma dokładnie dwa dodatnie dzielniki; $12=2^2\times3$; 1 tylko jeden.

L037 • Praktyka i sprawdzenie

20–32



20–32: Rozłóż 60 i 84 na czynniki pierwsze. Wskaż wspólne czynniki.

Wsparcie: Buduj drzewo iloczynów.

Pogłębienie: Uzasadnij, że każdy czynnik końcowy jest pierwszy.

32–39



32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42



39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45



42–45 • Bilet wyjścia: Czy 21 jest pierwsza?



Odpowiedzi i kontrola: $60=2^2\cdot3\cdot5$; $84=2^2\cdot3\cdot7$. Wspólne czynniki w rozkładach: 2; 2; 3. Bilet: nie, $21=3\cdot7$. Pogłębienie: Końcowe 2; 3; 5; 7 mają dokładnie po dwa dodatnie dzielniki.



Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L038 • Cena po rabacie

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Obliczasz nową cenę i oddzielasz rabat od ceny.

Wiadomości wstępne: procent liczby i całość

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.



Wspólny model:

Cena 160 zł, rabat 25%:

40 zł rabatu → **120 zł do zapłaty**

0 min — **5 min** — **12 min** — **20 min**



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. Cena 160 zł, rabat 25%: 40 zł rabatu, 120 zł do zapłaty.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L038 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 — 20–32: Oblicz cenę 350 zł po 12% rabatu i pierwotną cenę, gdy po 20% rabatu zostało 96 zł.

32–39 — 32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42 — 39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 — 42–45 • Bilet wyjścia: Cena 90 zł, rabat 10%, dostawa 8 zł. Ile razem?

Praktyka

Wsparcie: Wsparcie: Zapisz procent ceny pozostałej.

Pogłębienie: Pogłębienie: Kiedy rabat kwotowy 18 zł jest równy 15%? Przy 120 zł.

Bilet wyjścia

Cena 90 zł, rabat 10%, dostawa 8 zł. Ile razem?

Odpowiedzi i kontrola: Odpowiedzi i kontrola: 308 zł; 120 zł; bilet 89 zł. Pogłębienie: Przy cenie 120 zł.

Decyzja: Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L039 • Równanie jednym działaniem

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Stosujesz operację do obu stron i kontrolujesz wynik.

Wiadomości wstępne: działania odwrotne

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

$$x+8=21 \rightarrow x=13$$

sprawdzenie $13+8=21$.

0 min — **5 min** — **12 min** — **20 min**



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. $x+8=21 \rightarrow x=13$; sprawdzenie $13+8=21$.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L039 • Praktyka i sprawdzenie

20–32



20–32: Rozwiąż $x-7=-2$; $6x=42$; $\frac{x}{5}=-3$.

Wsparcie: Zapisz działanie obok obu stron.

Pogłębienie: Porównaj $0x=0$ i $0x=5$ bez dzielenia przez zero.

32–39



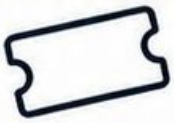
32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42



39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45



42–45 • Bilet wyjścia:
Rozwiąż $-4x=28$.

Odpowiedzi i kontrola: 5; 7; −15; bilet −7. Pogłębienie: $0x=0$: każde rzeczywiste x; $0x=5$: brak rozwiązań.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L040 • Pole trójkąta i trapezu

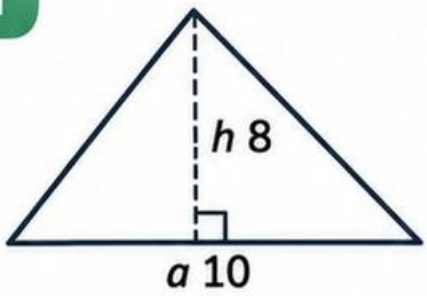
Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Uzasadniasz czynnik 1/2 i dobierasz wysokość.

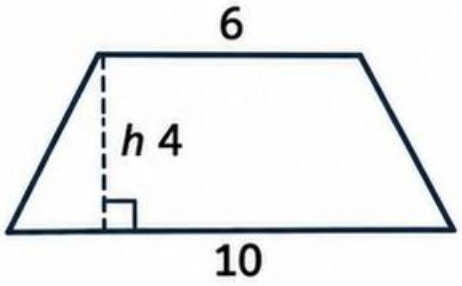
Wiadomości wstępne:
pole równoległoboku

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model



Trójkąt *a* 10, *h* 8 ma pole 40.



Trapez podstawy 6; 10, *h* 4 ma 32.

0 min — 5 min — 12 min — 20 min



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. Trójkąt *a* 10, *h* 8 ma pole 40; trapez podstawy 6; 10, *h* 4 ma 32.

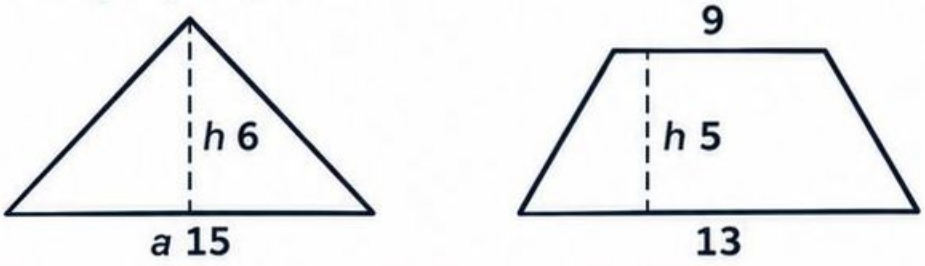


12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L040 • Praktyka i sprawdzenie

20–32

20–32: Oblicz trójkąt a 15, h 6 i trapez podstawy 9; 13, h 5.



Wsparcie: Podwój figurę, tworząc równoległobok.

Pogłębienie: Zaproponuj inny trójkąt o tym samym polu 36 cm^2.

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia: Trójkąt ma pole 36 cm^2 i podstawę 12 cm. Jaka wysokość?

Odpowiedzi i kontrola: 45; 55 w jednostkach kwadratowych; **bilet** 6 cm. **Pogłębienie:** Np. podstawa 9 cm, wysokość 8 cm: 36 cm^2.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L041 • Wzrost nie oznacza dodatniości

Liceum i technikum • 45 minut

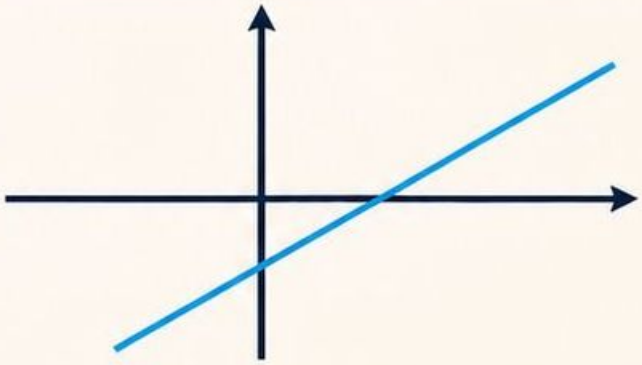
Cel i kryterium sukcesu:
Rozróżniasz monotoniczność i znak wartości.

Wiadomości wstępne:
porównywanie wartości funkcji

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model

$f(x)=x-20$
rośnie, choć
$f(0)=-20$.



0 min — **5 min** — **12 min** — **20 min**



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. $f(x)=x-20$ rośnie, choć $f(0)=-20$.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

LO41 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 **Porównaj $f(x) = 2x - 7$, $g(x) = -x + 9$, $h(x) = 4$ dla $x = 0; 1; 2$. Opisz zmiany.**

Wsparcie: Użyj dwóch argumentów w kolejności rosnącej.

Pogłębienie: Podaj rosnącą funkcję o samych ujemnych wartościach na [0; 2].

32–39 porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42 uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 **Bilet wyjścia:** Czy funkcja $-3x - 2$ jest rosnąca?



Odpowiedzi i kontrola:

Dla $x = 0; 1; 2$: $f = -7; -5; -3$; $g = 9; 8; 7$; $h = 4; 4; 4$.
f rośnie, g maleje, h stała. Bilet: $-3x - 2$ jest malejąca.
Pogłębienie: Np. $f(x) = 2x - 7$ na [0; 2] ma tylko ujemne wartości i rośnie.



Decyzja:

poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L042 • Dominanta i rozstęp

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Oddzielasz częstość wartości od odległości skrajnych danych.

Wiadomości wstępne:
minimum, maksimum i liczebność

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

Dane 2; 2; 5; 7; 7; 7; 9:
dominanta 7, rozstęp 7.





0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. Dane 2; 2; 5; 7; 7; 7; 9: dominanta 7, rozstęp 7.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L042 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 Ćwiczenie | 32–39 Porównanie rozwiązań | 39–42 Reguła i warunek | 42–45 Bilet wyjścia

20–32: Oblicz dla 1; 1; 3; 3; 8 oraz 4; 4; 4; 4. Wskaż wielokrotną dominantę.

Wsparcie:

Zbuduj tabelę liczebności.

Pogłębienie:

Czy jednakowy rozstęp gwarantuje jednakową średnią? Podaj kontrprzykład.

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia: Jaki rozstęp −3; 0; 5?

Odpowiedzi i kontrola: Dominanty 1 i 3, rozstęp 7; drugi dominanta 4, rozstęp 0; bilet 8. Pogłębienie: Dane 0; 2 oraz 10; 12 mają rozstęp 2 i średnie 1 oraz 11.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L043 • Położenie liczb całkowitych

Klasy 4–6 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Porównujesz liczby ujemne według położenia, nie samych cyfr.

Wiadomości wstępne: oś liczbowa

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

0–5

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12

5–12: wspólny model. $-8 < -3$, bo leży bardziej w lewo.



12–20

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.



L043 • Praktyka i sprawdzenie



20–32 Uporządkuj, oblicz odległość.

32–39 Porównaj dwa rozwiązania.

39–42 Sformułuj regułę.

42–45 Bilet wyjścia.



Praktyka

20–32: Uporządkuj −1; −7; 3; 0; −4. Oblicz odległość −7 od 3.

Wsparcie: Zaznacz zero i jednostkę.

Pogłębienie: Wyjaśnij różnicę liczby przeciwnej i odległości od zera.

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia: Która większa: −12 czy −5?

Odpowiedzi i kontrola: $-7<-4<-1<0<3$; odległość 10; bilet −5. Pogłębienie: Dla 7 liczba przeciwna to −7, odległość od 0 to 7.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L044 • Podwyżka i cena nowa

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Stosujesz mnożnik większy od 1 i interpretujesz przyrost.

Wiadomości wstępne: procent liczby

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model

Cena 240 zł wzrasta o 15%: 36 zł przyrostu, 276 zł cena nowa.







0–5

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12

5–12: wspólny model. Cena 240 zł wzrasta o 15%: 36 zł przyrostu, 276 zł cena nowa.

12–20

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L044 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 **Zwiększ 80 zł o 12,5%, a potem odtwórz cenę sprzed 20% wzrostu do 144 zł.**

Wsparcie: Oddziel pole „przyrost” od „nowa całość”.

Pogłębienie: Czy odjęcie 20% od 144 odtwarza poprzednią cenę? Nie.

32–39 **porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.**

39–42 **uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.**

42–45 **42–45 • Bilet wyjścia:** Jaka nowa cena 50 zł po 8% wzrostu?

Ćwiczenia

Odpowiedzi i kontrola: 90 zł; wcześniej 120 zł; bilet 54 zł.
Pogłębienie: $144 \cdot 0{,}8 = 115{,}2 \neq 120$; trzeba podzielić przez 1,2.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L045 • Równanie wielu kroków

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Zachowujesz równość przy redukcji i przenoszeniu działań.

Wiadomości wstępne: rozdzielność i równanie proste

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

$$2(x-3)+5=x+8 \rightarrow 2x-1=x+8 \rightarrow x=9.$$

0 — 5 — 12 — 20 min

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12: wspólny model. $2(x-3)+5=x+8 \rightarrow 2x-1=x+8 \rightarrow x=9.$

12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L045 • Praktyka i sprawdzenie



20–32: Rozwiąż $3(x+2)-4=2x+13$. Sprawdź obie strony dla wyniku.

Wsparcie: Rozdziel rozwinięcie nawiasu od gromadzenia niewiadomej.

Pogłębienie: Znajdź przykład równania sprzecznego z nawiasami.

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia: Rozwiąż $4x-7=x+8$.

Odpowiedzi i kontrola: $x=11$; obie strony 35; bilet $x=5$.
Pogłębienie: Np. $2(x+1)=2x+3$ daje sprzeczność $2=3$.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L046 • Okrąg i koło

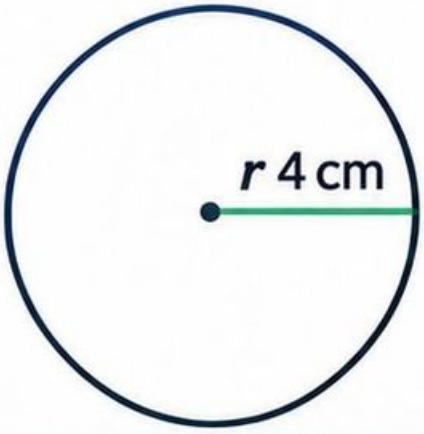
Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Oddzielasz długość granicy od powierzchni.

Wiadomości wstępne:
promień, średnica i pole

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model



d 8 cm
L 8 π cm
P 16 π cm^2

Przebieg (0–20 minut)

0–5



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.

5–12



5–12: wspólny model. Dla r 4 cm: d 8 cm, L 8 π cm, P 16 π cm^2.

12–20



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L046 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 | 32–39 | 39–42 | 42–45

Obliczenia i porównanie | Porównanie rozwiązań | Reguła i warunek | Bilet wyjścia

Praktyka

20–32: Oblicz *L* dla *d* 10 cm i *P* dla *r* 6 cm. Porównaj jednostki.

Wsparcie: Najpierw zapisz $r=d/2$.

Pogłębienie: Jak skaluje się długość i pole po potrojeniu promienia?

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia:

Średnica 14 cm. Jakie pole koła?

Odpowiedzi i kontrola: 10 π cm; 36 π cm²; bilet 49 π cm².
Pogłębienie: Długość rośnie 3 razy, pole 9 razy.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L047 • Współczynniki funkcji liniowej

Liceum i technikum • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Interpretujesz a i b i rozróżniasz ich role.

Wiadomości wstępne:
układ współrzędnych i wzór $y=ax+b$

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model
$y=-2x+5$ ma nachylenie -2 i przecięcie osi y w 5.

0 min — **5 min** — **12 min** — **20 min**



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model, $y=-2x+5$ ma nachylenie -2 i przecięcie osi y w 5.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L047 • Praktyka i sprawdzenie



20–32

20–32: Narysuj $y=3x-4$ oraz $y=3x+2$. Podaj zero pierwszej i relację prostych.

Wsparcie: Wpisz tabelę dla $x=0$ i 1.

Pogłębienie: Zmień nachylenie bez zmiany punktu przecięcia osi y.

32–39

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45

42–45 • Bilet wyjścia: Który współczynnik oznacza opłatę stałą w $K(t)=7t+12$?





Odpowiedzi i kontrola: Pierwsze zero 4/3; proste równoległe; bilet 12. **Pogłębienie:** Np. $-2x+5 \to 4x+5$ zachowuje przecięcie (0; 5).



Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L048 • Średnia z wagami

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Uwzględniasz liczebność i kontrolujesz sumę wag.

Wiadomości wstępne: średnia arytmetyczna

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Model

Wynik 4 ma wagę 2, a 10 wagę 1: średnia (8+10)/3=6.

0 min — 5 min — 12 min — 20 min

0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



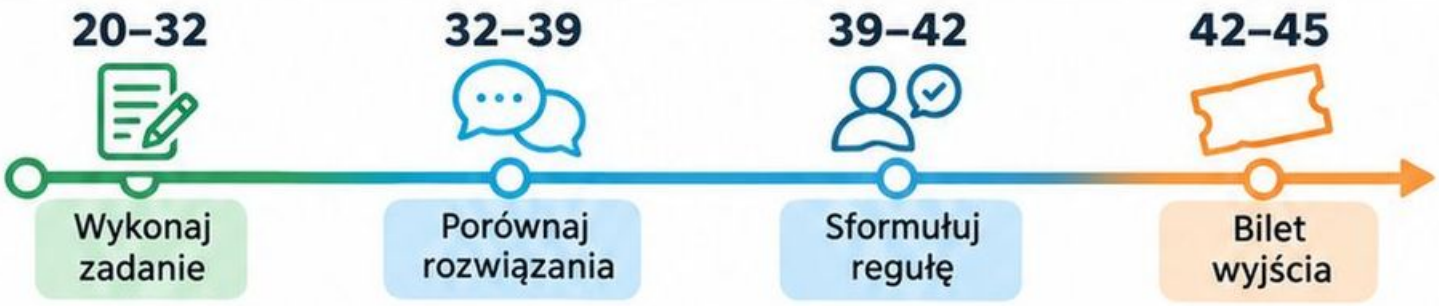
5–12: wspólny model. Wynik 4 ma wagę 2, a 10 wagę 1: średnia (8+10)/3=6.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.



L048 • Praktyka i sprawdzenie



Praktyka

20–32: Oblicz średnią 2 i 8 z wagami 1 i 3. Porównaj grupy 5 osób średnia 6 oraz 15 osób średnia 10.

Wsparcie: Rozpisz powtórzone dane zamiast skrótowego wzoru.

Pogłębienie: Dlaczego mnożenie wszystkich wag przez 10 nie zmienia średniej?

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia:

Wartości 3 i 9 mają wagi równe. Jaka średnia?

Odpowiedzi i kontrola: 6,5; wspólna 9; bilet 6. Pogłębienie: Czynnik 10 skraca się w liczniku i mianowniku.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L049 • Działania na liczbach ujemnych

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu: Uzasadniasz odejmowanie ujemnej przez działanie odwrotne.

Wiadomości wstępne: liczby przeciwne i kolejność działań

Materiały: papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

$$-3-(-7)=4,\ \text{bo}\ 4+(-7)=-3.$$

0 min — 5 min — 12 min — 20 min



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. $-3-(-7)=4$, bo $4+(-7)=-3$.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L049 • Praktyka i sprawdzenie

20–32



Oblicz −5+12−9; (−4)×(−6); 18:(−3). Kontroluj znaki.

Wsparcie: Zapisz każdą ujemną liczbę z nawiasem.

Pogłębienie: Wyjaśnij różnicę -3^2 oraz $(-3)^2$.

32–39



32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42



39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45



42–45 • Bilet wyjścia: Oblicz −2−(−8)+3.

Odpowiedzi i kontrola:

−2; 24; −6; bilet 9.

Pogłębienie: $-3^2=-9$, a $(-3)^2=9$.

Decyzja:

poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.

L050 • Kolejne zmiany procentowe

Klasy 7–8 • 45 minut

Cel i kryterium sukcesu:
Mnożysz kolejne współczynniki, nie dodajesz zmian.

Wiadomości wstępne:
mnożniki rabatu i wzrostu

Materiały:
papier w kratkę, ołówek, linijka; modele i dane podano poniżej.

Wspólny model

200 zł → po +20% i −20% → 192 zł

$1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96.$

0 min — **5 min** — **12 min** — **20 min**



0–5: poproś o wyjaśnienie pojęcia z wymagań wstępnych. Sprawdź na krótkim przykładzie, czy potrzebna jest pomoc.



5–12: wspólny model. 200 zł po +20% i −20% daje 192 zł: $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$.



12–20: uczniowie odtwarzają model własnym zapisem i wyjaśniają jeden krok partnerowi.

L050 • Praktyka i sprawdzenie

20–32 → 32–39 → 39–42 → 42–45

20–32: Oblicz 300 zł po rabatach 10% i 20%. Porównaj z jednorazowym 30%.

Wsparcie: Zapisz nową całość po pierwszej zmianie.

Pogłębienie: Czy kolejność dwóch mnożników zmienia wynik bez zaokrąglania? Nie.

32–39: porównaj dwa rozwiązania. Przy błędzie wskaż pierwszy nieuprawniony krok i popraw go wspólnie.

39–42: uczeń formułuje regułę i wskazuje warunek jej stosowania.

42–45 • Bilet wyjścia: 100 zł po +10% i +10%: jaka cena?

Odpowiedzi i kontrola: 216 zł oraz 210 zł; bilet 121 zł; drugi wzrost od 110 zł. Pogłębienie: Nie; mnożenie jest przemienne, jeśli nie zaokrąglamy pośrednio.

Decyzja: poprawny argument — dalsze zastosowanie; poprawny wynik bez wyjaśnienia — pytanie o metodę; błąd pojęciowy — powrót do modelu.