Przewodnik nauczyciela

Jak uczynić matematykę ciekawszą

Konkretne działania, pytania i przykłady

Klasy 4–8 • liceum i technikum



Od diagnozy do następnego kroku

Spis treści



3–8 • Planowanie i reprezentacje →

9–14 • Pytania, błędy, informacja zwrotna i różnicowanie →

15–22 • Współpraca, dyskusja i powtórki →

23–28 • Sześć interwencji tematycznych →

29–35 • Diagnoza, kryteria i dostępność →

36–41 • Sekwencja lekcji i doskonalenie pracy →

42–44 • Indeks problemów i źródła →

Diagnoza poprzedza plan

Cel zapisz jako działanie: „Uczeń porównuje dwa ułamki i uzasadnia wybór”.

Próba: porównaj 3/5 i 1/2. Poproś o wyjaśnienie, nie tylko znak.

Odpowiedź: 3/5 > 1/2, bo 6/10 > 5/10.

Gdy uczeń porównuje same liczniki, wróć do jednakowych pasków. Gdy rozumie, zmień liczby.

Sprawdzenie: nowa para 2/3 i 3/4; poprawnie 2/3 < 3/4.



Lekcja przez badanie

Pytanie: czy dodanie tej samej liczby do licznika i mianownika zachowuje wartość ułamka?

5 min: indywidualna hipoteza. **10 min:** testy. **10 min:** rysunki. **10 min:** dyskusja. **10 min:** wnioski i kontrola.



Przykład obalający: 1/2 ≠ 2/3.

Nie nazywaj kilku zgodnych przykładów dowodem ogólnej reguły.

Kontrola: uczeń tworzy własny kontrprzykład i wyjaśnia różnicę między dodawaniem a mnożeniem obu części zapisu.

Reprezentacja konkretna



Użyj 12 jednakowych żetonów. Poleć wydzielić 1/3 zbioru, a następnie 1/4.

Wyniki: 4 żetony oraz 3 żetony. Całość w obu próbach pozostaje taka sama.

Zapytaj: dlaczego większy mianownik oznacza tutaj mniejszą część?

Błąd: zmiana liczby żetonów w trakcie porównania.

Sprawdzenie: uczeń wyjaśnia podział 12 na trzy i cztery równe grupy, zamiast tylko odliczyć wskazaną liczbę.

Reprezentacja obrazowa



Narysuj dwa paski jednakowej długości. Pierwszy podziel na 3 równe części, drugi na 4.

Zaznacz po jednej części. Połącz rysunek z zapisami 1/3 i 1/4.

Błąd: paski różnej długości mogą dać mylące porównanie.

Zapytaj, co oznacza cała długość paska.

Sprawdzenie: uczeń sam tworzy rysunek pokazujący, że 2/3 > 1/2; zaznaczone części muszą odnosić się do równych całości.

Reprezentacja symboliczna



Przejdź od pasków do wspólnego mianownika: 1/3 = 4/12, a 1/4 = 3/12.

Wyjaśnij: zmieniamy liczbę części, zachowując wartość zaznaczonej długości.

Uczeń dopisuje, przez jaką liczbę mnoży licznik i mianownik.

Błąd: mnożenie tylko mianownika.

Sprawdzenie: 2/5 = 6/15, ponieważ oba człony zapisu mnożymy przez 3.

Połącz trzy reprezentacje

Przygotuj trzy karty: 3 z 12 żetonów, pasek z zaznaczoną 1/4 oraz zapis 3/12 = 1/4.

Uczeń łączy karty i wskazuje, co w każdej oznacza całość, część i podział.

Nie wystarcza stwierdzenie „wszędzie jest ćwiartka”. Wymagaj pokazania odpowiedników.

Sprawdzenie: uczeń tworzy analogiczną trójkę kart dla 2/3 na zbiorze 12 elementów: zaznacza 8.



Pytania ujawniające rozumowanie

Zamiast „Rozumiesz?” zapytaj: „Dlaczego wybrałeś to działanie?”, „Co oznacza ta liczba?” i „Jak sprawdzisz wynik?”.

Przy 25% z 80 oczekuj odniesienia do ćwiartki albo działania 0,25 × 80.

Dopytaj: czy 25% z 40 też wynosi 20? Nie: wynosi 10.

Sprawdzenie: uczeń wyjaśnia zależność wartości procentu od wybranej całości.



Najpierw oszacuj

Przed obliczeniem 19,8 × 5,1 poproś o szacunek: około 20 × 5 = 100.

Wynik dokładny: 100,98. Porównaj go z przewidywaniem.

Gdy uczeń otrzyma 10,098, zapytaj o rząd wielkości, zamiast wskazywać od razu przecinek.

Szacunek nie dowodzi dokładnej poprawności.

Sprawdzenie: przy 48 × 2,1 uczeń przewiduje około 100 i otrzymuje 100,8.



Błąd staje się zadaniem

Pokaż fikcyjne rozwiązanie: 2/3 + 1/3 = 3/6.

Poproś o znalezienie pierwszego błędnego kroku i narysowanie trzech równych części.

Poprawnie: 3/3 = 1. Dodajemy liczbę części tego samego rodzaju, nie zmieniamy ich rozmiaru.

Nie przypisuj błędu cechom osoby.

Sprawdzenie: nowy przykład 3/5 + 1/5 = 4/5 wraz z uzasadnieniem.



Informacja zwrotna w trzech krokach

1. Nazwij osiągnięcie: „Poprawnie wyznaczasz cenę po rabacie”.

2. Wskaż miejsce poprawy:
„Do ceny towaru nie doliczono dostawy”.

3. Podaj działanie:
„Dopisz osobny wiersz kosztów i oblicz całość”.



Przykład: 80 zł z rabatem 25% to 60 zł; dostawa 9 zł daje 69 zł.

Sprawdzenie: uczeń poprawia wynik i samodzielnie sprawdza drugi przykład z dodatkowym kosztem.

Różnicuj wsparcie

Wspólny cel: rozwiązać $3x + 5 = 20$.



Wsparcie A: pytanie „Jak usuniesz dodane 5?”. Wsparcie B: zapis $3x = 15$. Wariant samodzielny: samo równanie.

Wynik wszystkich ścieżek: $x = 5$; kontrola $3 \times 5 + 5 = 20$.

Nie zmieniaj celu na przepisywanie gotowych kroków.

Sprawdzenie: nowe równanie $4x + 2 = 18$ bez podpowiedzi; $x = 4$.

Różnicuj wyzwanie

Po obliczeniu 20% z 150 = 30 zapytaj: kiedy rabat 30 zł jest lepszy od rabatu 20%?

Uczeń porównuje 30 z $0{,}2c$ dla ceny c.

Próg równości: $c = 150$ zł. Poniżej niego korzystniejsze *30 zł*, powyżej 20%.

Warunki: cena dodatnia; rabat kwotowy nie przekracza ceny.

Sprawdzenie: uzasadnione przykłady dla 100 zł i 200 zł, zamiast kolejnej długiej serii rachunków.



Para z rolami

Zadanie: obliczyć pole prostokąta 3,5 cm × 4 cm.

Osoba A wyjaśnia plan i liczy; osoba B sprawdza jednostki i sens wyniku. Potem zamiana ról przy nowym zadaniu.

Wynik: 14 cm^2.



Nie ograniczaj jednej osoby do przepisywania.

Sprawdzenie indywidualne: każdy oblicza pole prostokąta 2,5 cm × 6 cm i wyjaśnia jednostkę; 15 cm^2.

Grupa z udziałem każdego

Daj grupie pytanie: czy dwa prostokąty o obwodzie 20 cm muszą mieć równe pola?

Najpierw każdy zapisuje przykład. Dopiero potem grupa uzgadnia odpowiedź.

Role: prowadzący pytania, zapisujący argument i sprawdzający dane; przy kolejnym problemie rotacja.



Kontrprzykład: 1 × 9 daje pole 9, a 4 × 6 pole 24 cm².

Sprawdzenie: każdy potrafi sam objaśnić wspólny argument.

Stacje uczenia się

Trzy stacje po 8 minut: rysunek ułamka, porównanie zapisów, zadanie tekstowe. Dodaj 3 minuty na przejścia i 5 na podsumowanie: razem 32 minuty.

Na każdej stacji umieść instrukcję i jedno pytanie kontrolne.



Przykład wspólnej idei: 3/4 paska, 0,75 oraz 75% klasy.

Sprawdzenie: uczeń łączy reprezentacje, a nie tylko zbiera poprawne odpowiedzi.

Rotacja przy małej liczbie materiałów

Masz jeden komplet żetonów i trzy grupy. Stacja A: żetony; B: rysunki w zeszycie; C: zapisy symboliczne.

Co 6 minut zmiana; trzy rundy dają 18 minut, przejścia zaplanuj osobno.

Zadanie wspólne: pokaż 2/3 z 12; wynik 8.

Na stacji bez pomocy uczeń odtwarza model samodzielnie.

Sprawdzenie: końcowe zadanie 3/4 z 12 = 9 bez dostępu do żetonów.



Porównuj strategie

Problem: 25% z 240.

Zapisz dwa rozwiązania: 240 : 4 = 60 oraz 0,25 × 240 = 60.

Zapytaj, co uzasadnia dzielenie przez 4 i czy sposób działa równie wygodnie dla 17%.

Nie ogłaszaj jednej metody zawsze najlepszą.



Sprawdzenie: uczeń wybiera metodę dla 12,5% z 80 i uzasadnia, że 12,5% = $\frac{1}{8}$, więc wynik to 10.

Uzasadnienie i kontrprzykład



Zdanie: „Każdy prostokąt jest kwadratem”.

Poproś o przykład spełniający definicję prostokąta, a niespełniający definicji kwadratu: boki 2 cm i 5 cm.

Jeden kontrprzykład obala zdanie ogólne; kilka kwadratów go nie potwierdza.

Sprawdzenie: uczeń ocenia zdanie odwrotne. Każdy kwadrat jest prostokątem, ponieważ ma cztery kąty proste.

Odtwarzanie z pamięci

Po wcześniejszej nauce zakryj notatkę. Poproś o zapis wzoru pola trójkąta i opis symboli.

Następnie uczeń porównuje zapis ze źródłem i poprawia go.



Przykład: $P = \frac{ah}{2}$; wysokość h jest prostopadła do podstawy a.

Nie utrwalaj wielokrotnie niesprawdzonej odpowiedzi.

Sprawdzenie: dla $a = 8$ cm i $h = 3$ cm uczeń otrzymuje 12 cm².

Powtórka rozłożona w czasie



Przykładowy plan: pierwsza próba następnego dnia, druga po tygodniu, trzecia po trzech tygodniach. Dostosuj odstępy do wyników.

Za każdym razem użyj innego kontekstu tej samej umiejętności.

Dla procentu: 10% z 90; rabat 10% od 70 zł; wzrost 10% z 50.

Wyniki: 9; nowa cena 63 zł; nowa wartość 55.

Sprawdzenie: zapisuj poprawność i rodzaj wsparcia, zamiast obiecywać trwałość po określonej liczbie powtórek.

Ułamek: interwencja paskami





Trudność: uczeń twierdzi, że 1/8 > 1/4, bo 8 > 4.

Narysuj dwa równe paski i podziel na 8 oraz 4 równe części. Zaznacz po jednej.

Zapytaj: ile ósmych mieści się w ćwiartce? Dwie.

Wniosek: 1/4 = 2/8 > 1/8.

Sprawdzenie bez gotowego modelu: porównaj 1/3 i 1/6; poprawnie 1/3 > 1/6.

Procent: interwencja siatką



Trudność: uczeń myli 20% z 20 zł.

Pokaż siatkę 100 równych pól jako całość 150 zł. Zaznacz 20 pól.

Jedno pole oznacza 1,50 zł; 20 pól to 30 zł.

Oddziel etykietę udziału od wartości pieniężnej.

Sprawdzenie: nowa całość 200 zł. Te same 20% to 40 zł; uczeń ma wyjaśnić, dlaczego zmieniła się kwota.

Równanie: interwencja równowagą

Trudność: uczeń odejmuje 5 tylko po lewej stronie równania $2x + 5 = 17$.



Przedstaw obie strony jako równe wartości. Odejmij 5 z obu: $2x = 12$.

Podziel obie strony przez 2: $x = 6$.

Rysunek wagi jest modelem równości, nie obowiązkowym obrazem każdej liczby ujemnej.

Sprawdzenie: $3x + 4 = 19$; $x = 5$ i kontrola podstawieniem.

Pole: interwencja siatką

Trudność: uczeń myli pole z obwodem.

Narysuj prostokąt 4 cm × 3 cm w siatce centymetrowej. Policz 12 kwadratów wewnątrz i 14 centymetrowych odcinków brzegu.

Pole: 12 cm^2. **Obwód:** 14 cm.

Zapytaj, co kupujemy jako powierzchnię, a co jako długość ogrodzenia.

Sprawdzenie: dla 5 cm × 2 cm pole wynosi 10 cm^2, obwód nadal 14 cm.







Funkcja: interwencja tabelą

Klasy 7–8: badaj zależność; liceum i technikum: nazywaj funkcję zgodnie z programem.

Model: koszt $y = 3x + 2$ zł za x jednostek, $x \geq 0$.

Tabela: $x = 0; 1; 2$.
Odpowiadające $y = 2; 5; 8$.

Każdemu x przypisano jedno y. Stały przyrost nie oznacza proporcjonalności prostej, bo opłata początkowa wynosi 2 zł.

Sprawdzenie: dla $x = 4$ koszt 14 zł; uczeń wyjaśnia rolę obu stałych.



Dane: interwencja skrajną wartością



Zapisz liczby: 2 • 3 • 3 • 4 • 18.

Średnia to 30 : 5 = 6, mediana 3.

Zapytaj, która liczba lepiej opisuje środek tego zestawu i dlaczego. Odpowiedź zależy od celu opisu.

Nie nazywaj średniej zawsze niewłaściwą.

Sprawdzenie: po usunięciu 18 średnia wynosi 3, mediana nadal 3; uczeń wyjaśnia wpływ skrajnej wartości.

Bilet wejścia



Przed lekcją procentów daj dwa pytania na 3 minuty: ile wynosi 1/4 z 80? Jak zapisać 0,25 procentem?

Odpowiedzi: 20 i 25%.

Dwa poprawne rozwiązania: przejdź do zastosowań. Błąd tylko w zapisie: krótka zamiana reprezentacji. Błąd w obu: wróć do modelu części całości.

Zasady są decyzją dydaktyczną, nie oceną stopniem.

Sprawdzenie: podobne pytanie po udzieleniu wsparcia.

Bilet wyjścia

Na koniec zapytaj: „Cena 100 zł spada o 20%, potem o 10%. Ile wynosi i dlaczego?”.

Odpowiedź: 100 × 0,8 × 0,9 = 72 zł.

72 zł z uzasadnieniem: zastosowanie opanowane. 72 zł bez wyjaśnienia: dopytaj o podstawę drugiego rabatu. 70 zł: wróć do kolejnych całości.

Sprawdzenie na następnej lekcji: 200 zł, rabaty 10% i 10%; wynik 162 zł.



Rubryka rozumowania

Poziom 0: brak rozwiązania lub kroki niezwiązane z pytaniem.

Poziom 1: sensowny start, ale brak ważnego warunku lub argumentu.

Poziom 2: poprawna metoda i wynik, częściowo niepełne uzasadnienie.

Poziom 3: poprawne, kompletne rozumowanie i sprawdzenie warunków.

Przykład: przy porównaniu 2/3 i 3/4 poziom 3 obejmuje 8/12 < 9/12 oraz wskazanie równych całości.

Rubryka opisuje pracę, a nie osobę; dostosuj ją do konkretnego zadania.



Samoocena z dowodem



Uczeń wybiera: samodzielnie, z pomocą albo jeszcze nie.

Do każdego wyboru dopisuje dowód: rozwiązany przykład lub wskazany krok trudności.

Przykład: „Obliczam 15% z 200 = 30, korzystając z 10% i 5%”.

Nie traktuj samego zaznaczenia pewności jako dowodu umiejętności.

Sprawdzenie: nowe zadanie 15% z 80 = 12; porównaj samoocenę z wykonaniem i wybierz następne ćwiczenie.

Czytanie poleceń



Polecenie: „Oblicz koszt 3 notesów po 8 zł i dostawy 6 zł”.

Uczeń zaznacza pytanie, wypisuje dane z jednostkami i opowiada sytuację własnymi słowami.

Model: 3 × 8 + 6 = 30 zł.

Błąd: 3 × (8 + 6) nalicza dostawę trzykrotnie.

Sprawdzenie: uczeń wyjaśnia, dlaczego dostawa występuje w zapisie tylko raz, a następnie układa podobne polecenie.

Wsparcie wzrokowe i dostępność



Stosuj etykiety oprócz kolorów, czytelne znaki i jeden układ danych w zadaniu.

Wykres opisz osiami, jednostkami i skalą. Do ilustracji dodaj tekst z relacjami potrzebnymi do rozwiązania.

Przykład: zamiast „czerwony słupek” napisz „słupek A: 12 osób”.

Nie wymagaj odczytania dokładnego wymiaru z rysunku poglądowego.

Sprawdzenie: uczeń może odtworzyć istotne dane także z wydruku czarno-białego albo opisu słownego.

Tempo i czas namysłu



Po pytaniu daj najpierw około 20–30 sekund na własny zapis. Dostosuj ten czas do złożoności zadania.

Dopiero potem poproś o porównanie w parze i odpowiedź na forum.

Przy 3/4 i 2/3 wymagaj planu porównania, nie najszybszego okrzyku.

Gdy większość nie zaczęła, sprawdź rozumienie polecenia zamiast tylko wydłużać ciszę.

Sprawdzenie: zbierz zapis strategii od wszystkich, również osób niewypowiadających się publicznie.

Zaplanuj sekwencję

Ustal jedno wymaganie końcowe, np. porównanie dwóch ofert po rabacie i dostawie.

Wypisz umiejętności wstępne: procent liczby, dodawanie kosztów, porównanie kwot.

Zaplanuj: diagnoza → model → ćwiczenie wspólne → próba samodzielna → zadanie w nowym kontekście.

Każdy etap kończ krótkim dowodem umiejętności.

Sprawdzenie: jeśli uczeń liczy rabat, ale pomija dostawę, ćwicz model kosztu, a nie całą procedurę procentową od początku.



Sekwencja: przykład wypełniony

Dwie lekcje po 45 minut, klasy 7–8.

Lekcja 1: diagnoza 5 min, model ceny 10, zadania w parach 15, próba samodzielna 10, podsumowanie 5.

Lekcja 2: przypomnienie 5, porównanie ofert 15, uzasadnienia 10, nowe zadanie 10, bilet wyjścia 5.

Przykład: A 100 zł z rabatem 20% i dostawą 15 zł daje 95 zł; B 90 zł bez dostawy daje 90 zł.

Sukces: uczeń uwzględnia wszystkie koszty i uzasadnia wybór B.



Notatka o klasie

Zapisuj zbiorcze obserwacje, bez nazwisk w udostępnianym materiale.

Przykład fikcyjny: z 24 osób 16 poprawnie uwzględniło dostawę; 8 pominęło koszt stały.

Wniosek: krótka praca nad modelem pełnego kosztu, potem nowa próba.

Nie wnioskuj z jednej odpowiedzi o trwałych możliwościach ucznia.

Szablon: umiejętność — liczba poprawnych odpowiedzi — typ trudności — zastosowane wsparcie — wynik kolejnej próby.



Plan poprawy

Wybierz jeden problem potwierdzony pracami, np. pomijanie jednostki pola.

Działanie: przy trzech zadaniach uczniowie łączą rysunek kwadratu jednostkowego z wynikiem.



Termin kontroli: następna lekcja. Kryterium: poprawny wynik z cm^2 i wyjaśnienie znaczenia jednostki.

Jeśli błąd trwa, sprawdź rozumienie powierzchni i długości.

Sprawdzenie: porównaj dwie krótkie próby o podobnych wymaganiach, zamiast oceniać zmianę po ogólnym wrażeniu.

Obserwacja lekcji

Wybierz jedną obserwację: kto uzasadnia wybór metody?

Notuj zdarzenia, nie etykiety: „Uczeń wskazał wspólny mianownik 12” zamiast „uczeń zdolny”.

Sprawdź wypowiedzi, zapisy i indywidualny bilet wyjścia.

Przykładowe pytanie do omówienia: czy pytania nauczyciela dawały czas na samodzielny argument?

Sprawdzenie: wnioski muszą wskazywać konkretny fragment pracy oraz możliwą zmianę kolejnej lekcji.



Lista przygotowania

- Cel jest jednym sprawdzalnym działaniem.
- Zadania mają komplet danych, właściwe jednostki i poprawny klucz.
- Model odpowiada pojęciu i ma nazwane ograniczenia.
- Przygotowano pytanie diagnostyczne oraz zadanie samodzielne.
- Dostępne są wsparcie i pytanie pogłębiające.
- Czasy etapów sumują się do czasu zajęć.
- Wydruk próbny pozwala odczytać znaki, skalę i etykiety.
- Na końcu pozostaje czas na sprawdzenie, czego uczniowie rzeczywiście się nauczyli.



Znajdź rozwiązanie problemu



Uczeń liczy mechanicznie	→	8, 9, 19.
Uczeń nie rozumie ułamka	→	5–8, 23.
Uczeń myli podstawę procentu	→	24, 30.
Uczeń nie uzasadnia	→	19, 20, 31.
W grupie pracuje jedna osoba	→	15, 16.
Materiał przeciąża lub rozprasza	→	13, 33–35.
Po tygodniu potrzebny powrót	→	21, 22.
Nie wiadomo, co zmienić w nauczaniu	→	29, 30, 38–40.

Numery oznaczają strony tego przewodnika.

Źródła: zakres i wymagania

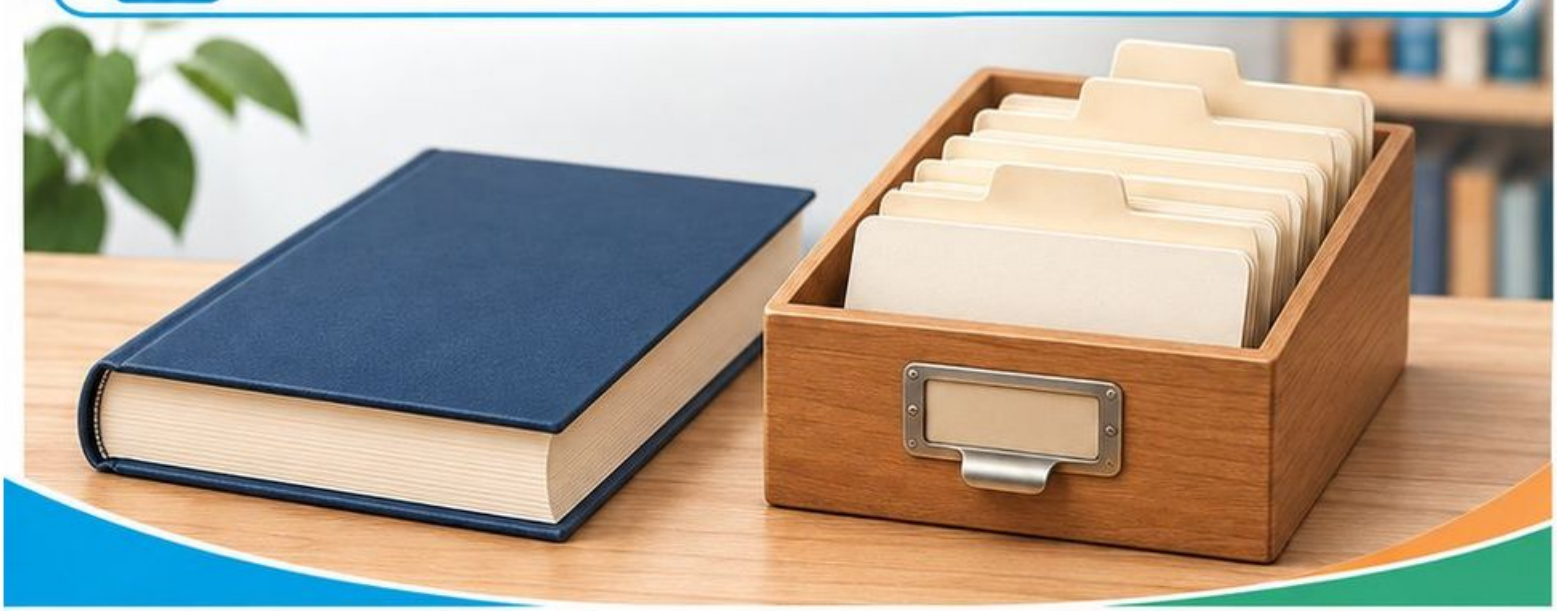
MEN: komunikat o nowych podstawach programowych i stopniowym wdrażaniu od 2026 r.
gov.pl/web/edukacja

ZPE: Matematyka, szkoła podstawowa.
zpe.gov.pl/podstawa-programowa/szkola-podstawowa/matematyka

ZPE: Matematyka, szkoła ponadpodstawowa.
zpe.gov.pl/podstawa-programowa/szkola-ponadpodstawowa/matematyka

Źródła służą do sprawdzania zakresu dla konkretnej klasy. W okresie zmian programowych ustal właściwą wersję dokumentu i rocznik.

Dostęp: 02.11.2026.



Źródła: wykorzystanie materiałów

CKE: informatory z matematyki, egzamin ósmoklasisty oraz matura w zakresie podstawowym.

egzaminy.gov.pl/cke

Informator maturalny:
cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Informatory/2024/Informator_EM2024_matematyka_pp.pdf



Sprawdź aktualizacje dla roku egzaminu. Przykłady w przewodniku są autorskie; nie odtwarzają arkuszy egzaminacyjnych.

Scenariusze, odstępy powtórek i czasy namysłu są propozycjami do dostosowania, bez gwarancji skuteczności dla każdej klasy.

Wersja 1.0 • listopad 2026. Przykłady osób i wyników klasy są fikcyjne.