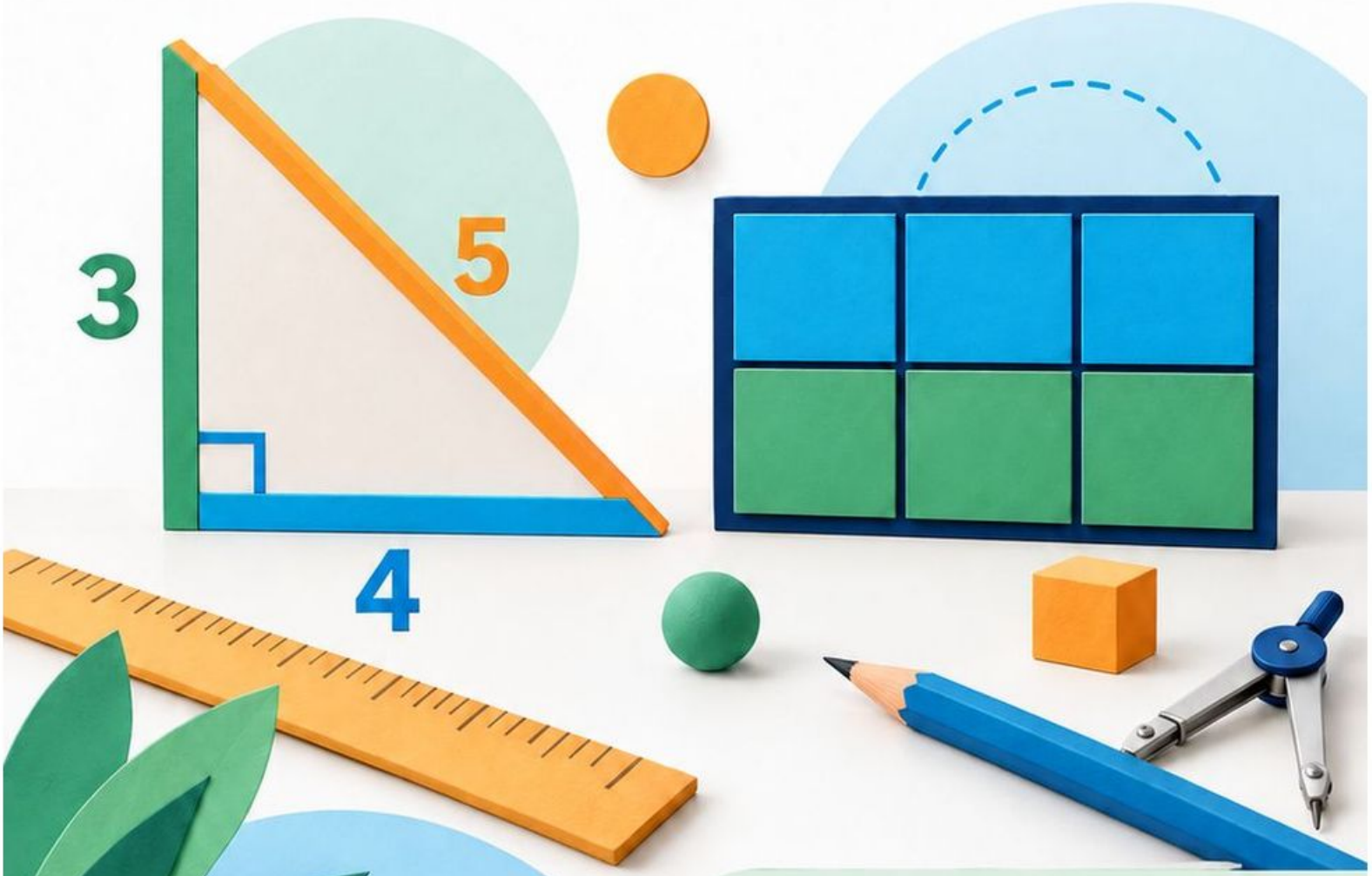
Wizualny Atlas Wzorów Matematycznych

65 plansz: wzór, warunki, rysunek i rozwiązany przykład.

Klasy 4–6 • klasy 7–8 • liceum: zakres podstawowy



Najpierw rozpoznaj sytuację.
Potem wybierz wzór i sprawdź jednostki.

Indeks wizualny

1 **5–15:** liczby, działania i zapis.



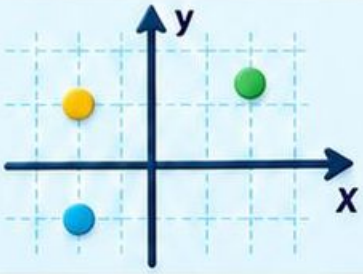
2 **16–22:** procenty, proporcje, skala, ruch.



3 **23–33:** algebra, równania i ciągi.



4 **34–39:** układ współrzędnych i funkcje.



5 **40–54:** geometria płaska i bryły.



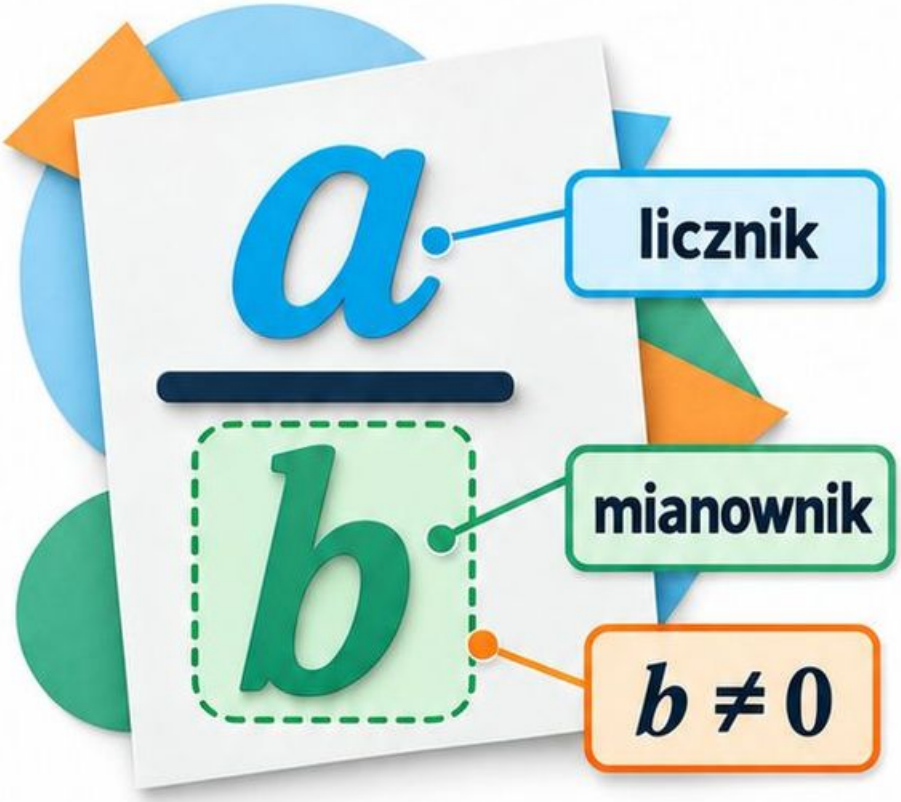
6 **55–64:** jednostki, statystyka i prawdopodobieństwo.



7 **65–69:** logarytmy, trygonometria, procent składany i rozproszenie danych.

8 **70:** symbole • **71:** tematy i etapy • **72–73:** źródła.

Jak czytać symbole i poziomy



4–6: 4–6: klasy szkoły podstawowej.

7–8: 7–8: starsze klasy.

L: L: liceum, zakres podstawowy.

Oznaczenia wskazują poziom planszy, nie komplet programu.

a, b, x

a, b, x: liczby lub wielkości opisane na planszy.
$\neq$: różne; $\approx$: w przybliżeniu; $\in$: należy do.



P: pole; O: obwód; V: objętość; h: wysokość; r: promień.

$\frac{a}{b}$

Warunki są częścią wzoru.
Przykład: $\frac{a}{b}$ wymaga $b \neq 0$.



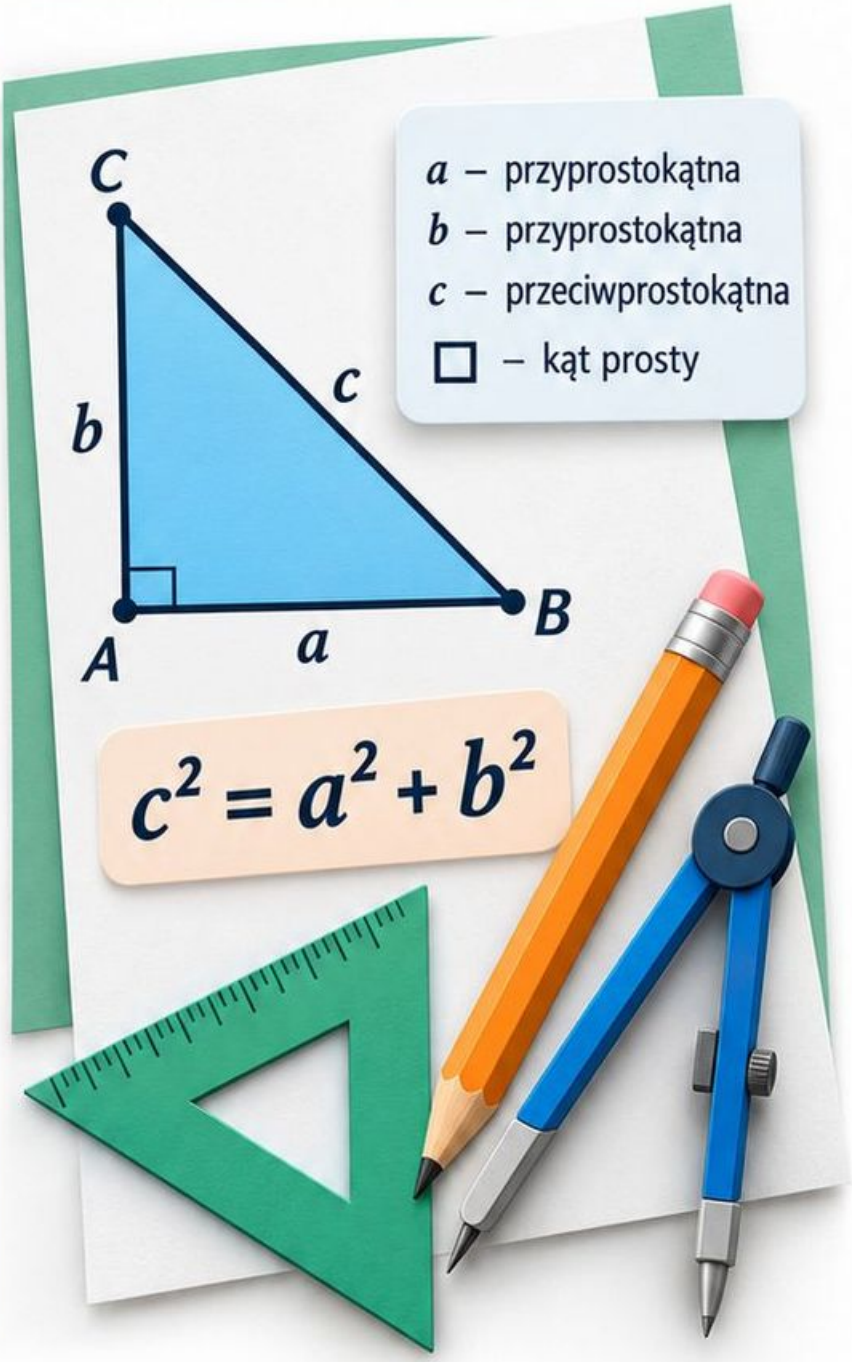
Rysunki poglądowe: korzystaj z podpisów, nie z pomiaru ilustracji.

Druk i ściana wzorów

1. Drukuj po jednej planszy na arkuszu A4, pionowo. Wybierz dopasowanie do obszaru druku; nie przycinaj warunków ani numeru strony.

2. Przed drukiem serii sprawdź jedną planszę: polskie znaki, ułamki, wykładniki i jednostki muszą być czytelne.

3. Układaj tematy grupami według indeksu. Umieść wzór na wysokości wzroku; zostaw miejsce na własny przykład.



4. Wydruk jest materiałem poglądowym. Nie mierz na nim odcinków ani kątów.

5. Po rozwiązaniu zadania wskaż wzór, sprawdź warunki i dopisz jednostkę.

A01 • Symbole i warunki

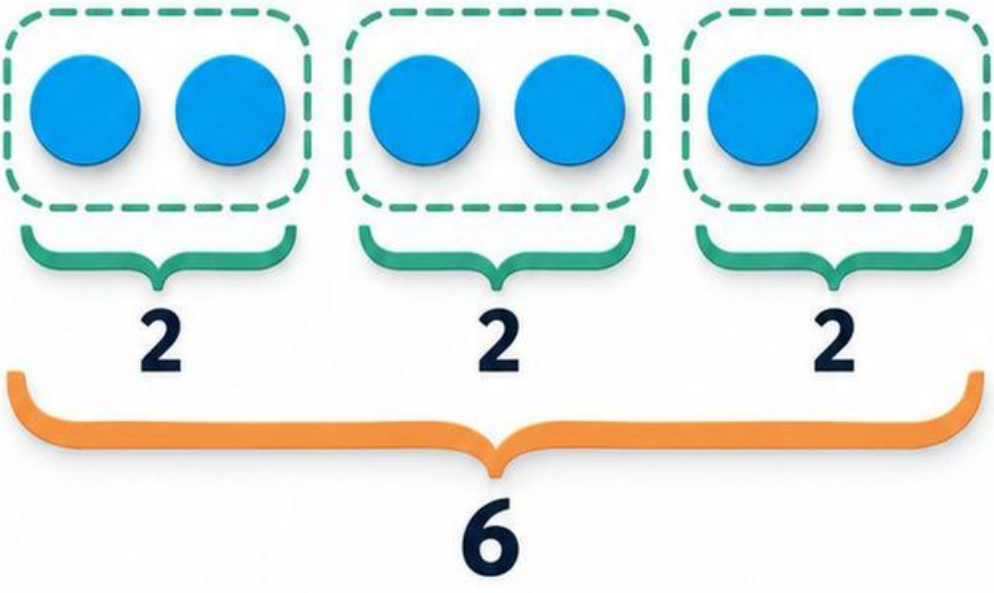
Poziom: 4–6

$\frac{a}{b}$ oznacza $a : b$; $b \neq 0$. Znak $=$ łączy równe wartości; $\approx$ oznacza przybliżenie.

Warunki: Litery zastępują liczby. Najpierw ustal ich znaczenie i dopuszczalne wartości.

Przykład: Dla $a = 6$ i $b = 3$: $\frac{a}{b} = \frac{6}{3} = 2$. Dla $b = 0$ wyrażenie nie ma wartości.

Rysunek: Sześć kropek podzielono na trzy równe grupy po dwie.



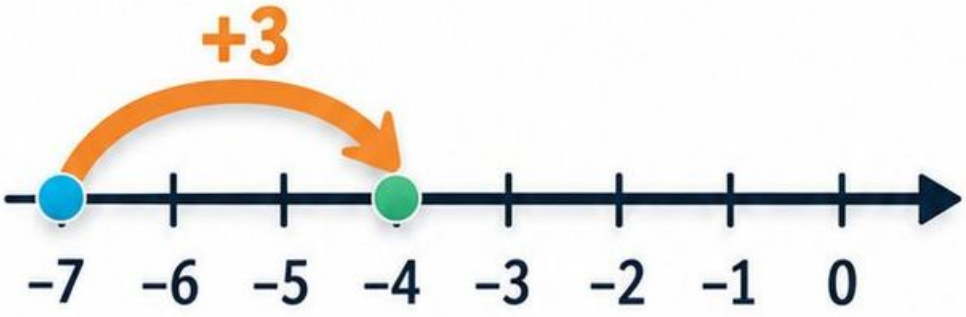
$$\frac{a}{b}$$
$$b \neq 0$$



A02 • Znaki działań

Poziom: 7–8

$(+a)\cdot(+b) = ab;\ (-a)\cdot(-b) = ab;\ (-a)\cdot b = -ab$ dla $a, b > 0$. Dzielenie ma te same reguły znaków.



·	+	−
+	+	−
−	−	+

Rysunek: Na osi strzałka od -7 do -4 oznacza dodanie 3.

Warunki: Dzielnik musi być różny od zera. Przy dodawaniu liczb różnych znaków odejmij moduły i zachowaj znak większego modułu. Przy równych modułach suma wynosi 0.

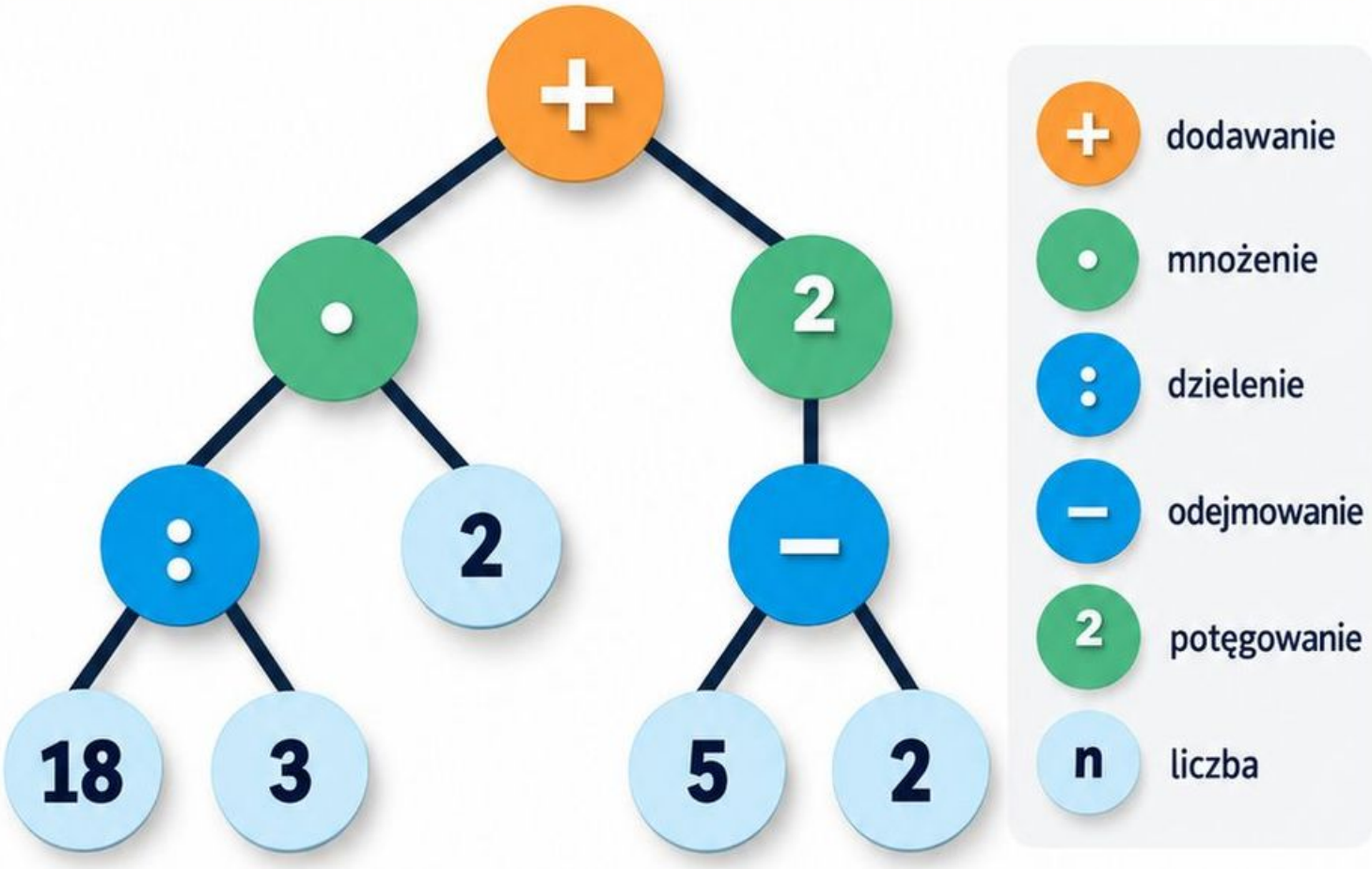
Przykład: $(-12) : 3 = -4;\ (-4)\cdot(-2) = 8;\ -7 + 3 = -4.$

A03 • Kolejność działań

Poziom: 4–6

Nawiasy → potęgi → mnożenie i dzielenie → dodawanie i odejmowanie.

Warunki: Działania tego samego poziomu wykonuj od lewej do prawej. Kreska ułamkowa grupuje cały licznik i mianownik.



Przykład: $18 : 3 \cdot 2 + (5 - 2)^2 = 6 \cdot 2 + 9 = 12 + 9 = 21.$

Rysunek: Drzewo działań rozdziela sumę na $18 : 3 \cdot 2$ oraz $(5 - 2)^2$.

A04 • Podzielność

Poziom: 4–6

Przez 2: ostatnia cyfra parzysta. **Przez 5:** końcówka 0 lub 5. **Przez 10:** końcówka 0.

Warunki: **Przez 3 lub 9:** suma cyfr jest podzielna przez 3 lub 9. **Przez 4:** liczba utworzona z dwóch ostatnich cyfr jest podzielna przez 4. Dotyczy liczb naturalnych.



Przykład: 234: suma cyfr 2 + 3 + 4 = 9. Liczba jest podzielna przez 2, 3 i 9; 234 : 9 = 26.

Rysunek: Cyfry 2, 3, 4 dają sumę 9; ostatnią cyfrą jest 4.

A05 • Ułamki równoważne

Poziom: 4–6

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}, \text{ gdy } b \neq 0 \text{ i } k \neq 0.$$

Warunki: Mnożymy albo dzielimy licznik i mianownik przez tę samą niezerową liczbę. Skracanie nie zmienia wartości ułamka.

Przykład: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Skracamy $\frac{6}{8}$ przez 2: $\frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$.



3 z 4 części zamalowane



6 z 8 części zamalowane

Rysunek: Równe paski mają odpowiednio trzy z czterech i sześć z ośmiu części zamalowanych.

A06 • Działania na ułamkach

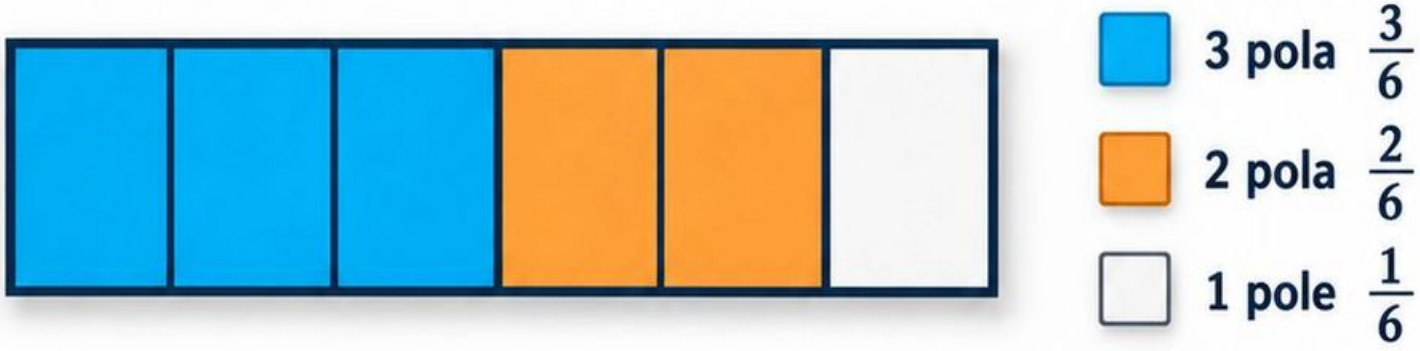
Poziom: 4–6

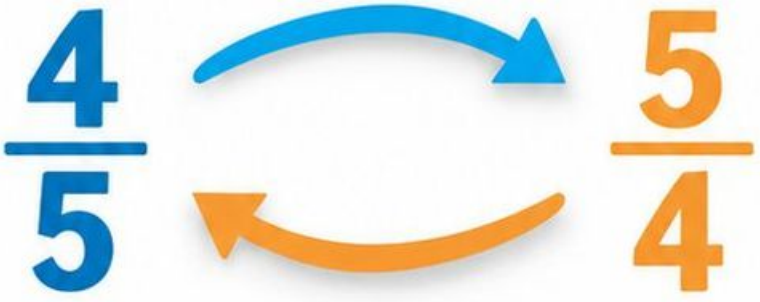
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}. \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Warunki: $b, d \neq 0$; przy dzieleniu dodatkowo $c \neq 0$.
Najpierw zamień liczby mieszane na ułamki niewłaściwe.

Przykład: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$ $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}.$

Rysunek: W pasku sześciu równych pól zaznaczono 3 pola i kolejne 2 pola.





A07 • Ułamki dziesiętne i zaokrąglanie

Poziom: 4–6

$$3{,}47 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100}.$$

Przy zaokrąglaniu sprawdź pierwszą odrzucaną cyfrę.

Warunki: Dla liczb nieujemnych: cyfry 0–4 pozostawiają poprzednią cyfrę bez zmiany; 5–9 zwiększają ją o 1, z uwzględnieniem przeniesienia.

Przykład: $3{,}47 \approx 3{,}5$ do części dziesiątych; $9{,}98 \approx 10{,}0$ do części dziesiątych.

Rysunek: Na osi 3,47 leży między 3,4 a 3,5, bliżej 3,5.



A08 • Potęgi

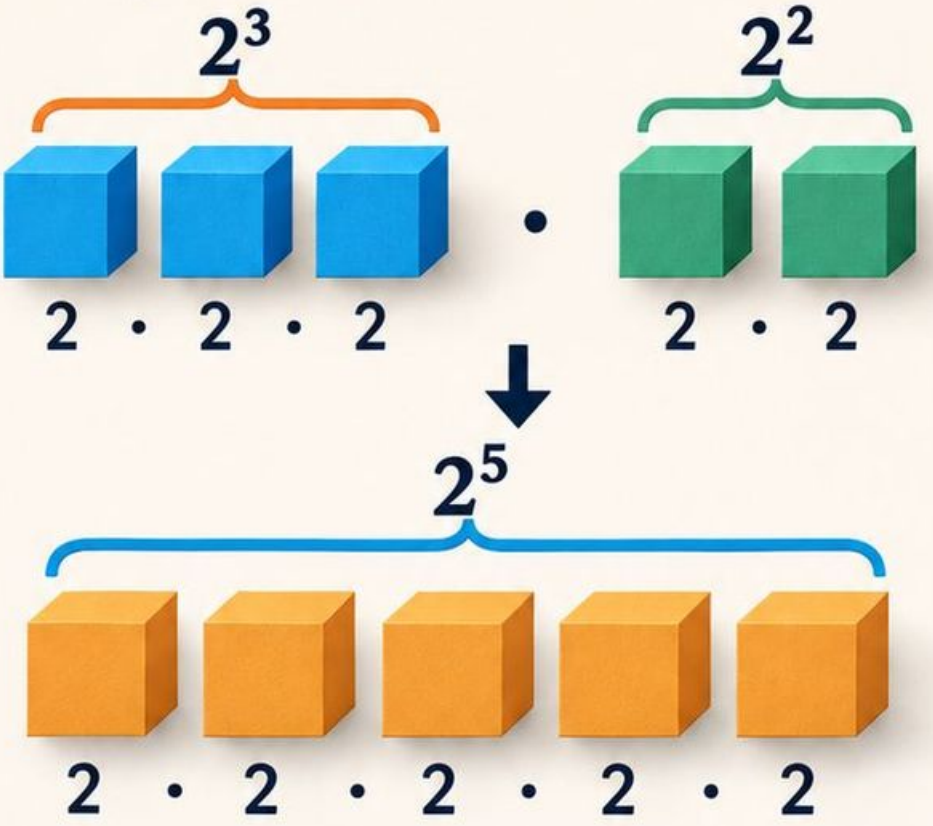
Poziom: 7–8

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ (a^m)^n = a^{mn};\ (ab)^n = a^n b^n.$$

Dla $a \neq 0$: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a^0 = 1.$

Warunki: W tych regułach m, n są całkowite; ujemne wykładniki wymagają niezerowej podstawy. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Zapis 0^0 pozostawiamy niezdefiniowany.

Rysunek: Trzy czynniki 2 i dwa czynniki 2 tworzą pięć czynników 2.



Przykład: $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$. $(-3)^2 = 9$, ale $-3^2 = -9$.

A09 • Notacja wykładnicza

Poziom: 7–8

$$x = a \cdot 10^n, \text{ gdzie } 1 \le a < 10, n \in \mathbb{Z}, \text{ dla } x > 0.$$

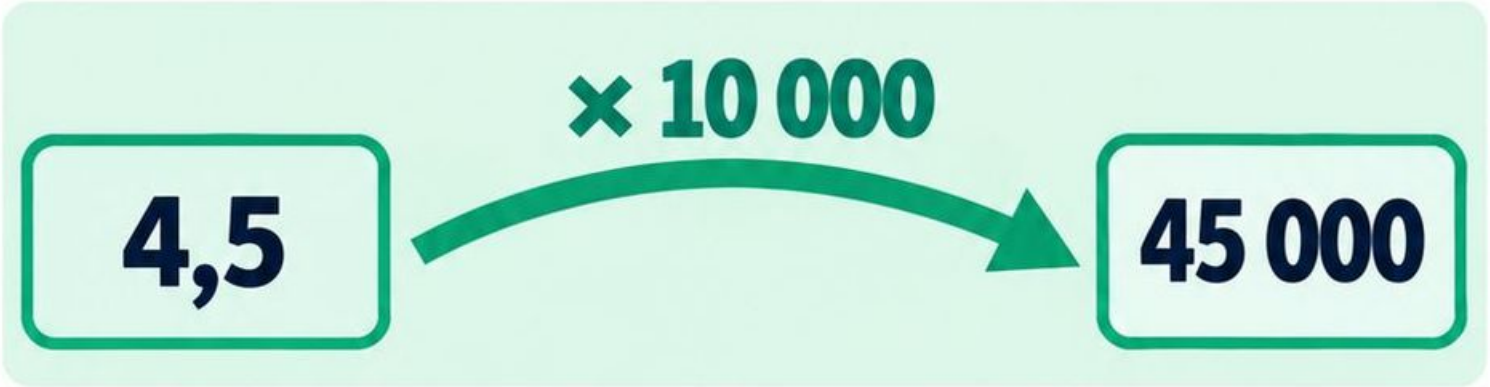
Warunki:

Dla liczby ujemnej zapisz minus przed notacją wartości bezwzględnej. Zero nie ma postaci z warunkiem $1 \le a < 10$.

Przykład:

$45\,000 = 4{,}5 \cdot 10^4$; $0{,}0032 = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$.
Sprawdź przez przesunięcie przecinka.

Rysunek: Schemat pokazuje mnożenie przez 10 000 i dzielenie przez 1000.





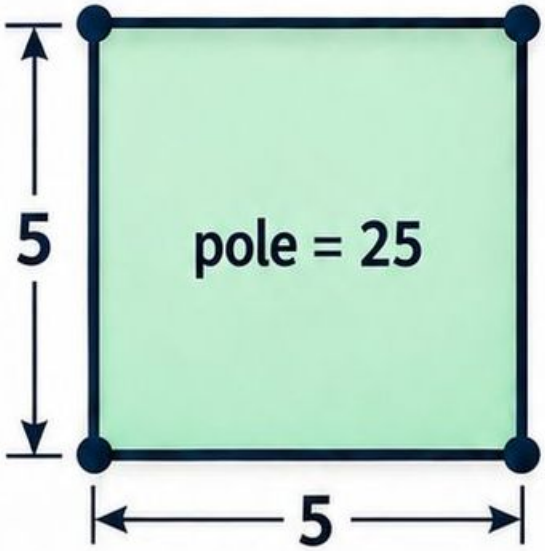
A10 • Pierwiastki

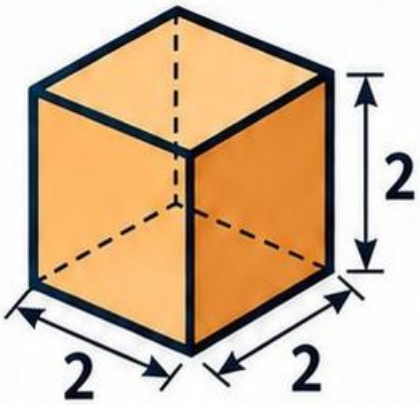
Poziom: 7–8

$$\sqrt{a} \geq 0 \text{ i } (\sqrt{a})^2 = a \text{ dla } a \geq 0.$$

$$\sqrt{(a^2)} = \text{wartość bezwzględna } a.$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ dla } a, b \geq 0.$$





Legenda:

Kwadrat o polu 25

Sześcian o krawędzi 2

Warunki:

Pierwiastek kwadratowy w liczbach rzeczywistych wymaga nieujemnej liczby pod pierwiastkiem. $\sqrt[3]{a}$ istnieje dla każdego rzeczywistego a.

Przykład:

$$\sqrt{72} = \sqrt{(36 \cdot 2)} = 6\sqrt{2}; \quad \sqrt{(-5)^2} = 5; \quad \sqrt[3]{(-8)} = -2.$$

Rysunek:

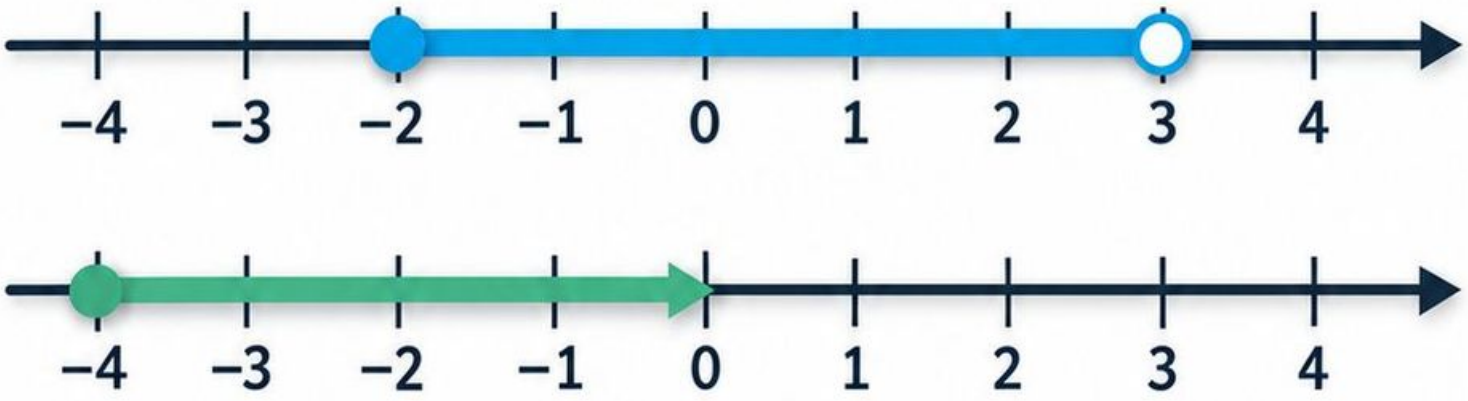
Kwadrat o polu 25 ma bok 5; długość boku jest dodatnia.

A11 • Wartość bezwzględna i przedziały

Poziom: L

Dla $x \geq 0$: wartość bezwzględna $x = x$.
Dla $x < 0$: wartość bezwzględna $x = -x$.

Warunki: Wartość bezwzględna opisuje odległość od zera.
$x \in [a,b]$ oznacza $a \leq x \leq b$; $x \in (a,b)$ oznacza $a < x < b, a < b$.



punkt pełny (należy do przedziału)
punkt pusty (nie należy do przedziału)
odcinek przedziału
strzałka (odcinek skierowany)

Przykład: Odległość −4 od 0 wynosi 4. Warunek $-2 \leq x < 3$ zapisujemy $x \in [-2,3)$.

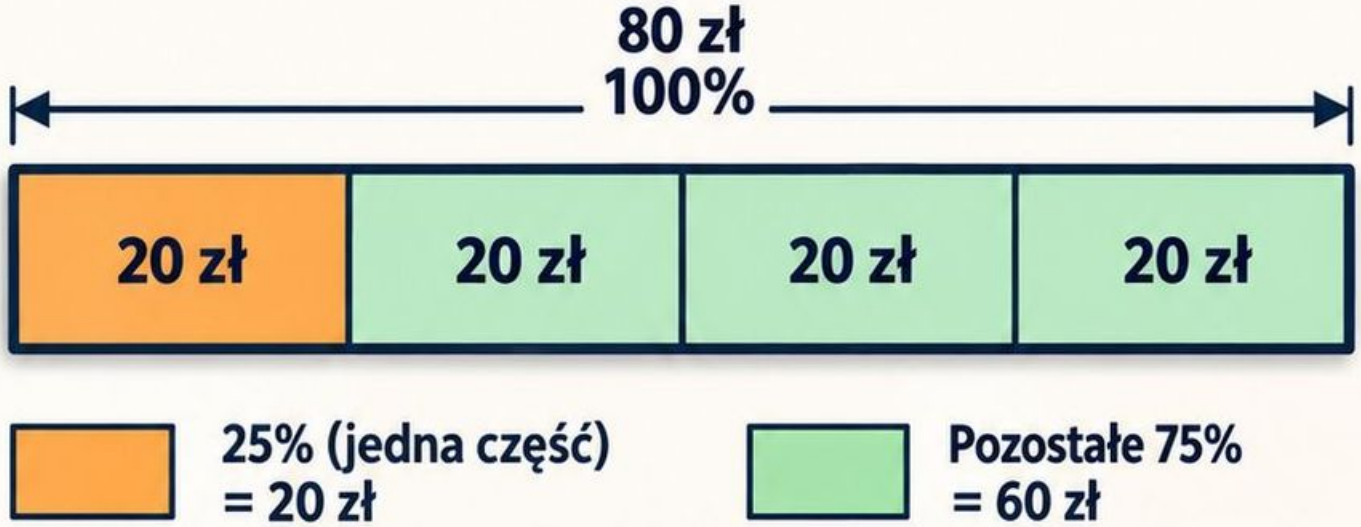
Rysunek: Przy −2 punkt pełny, przy 3 pusty: lewy koniec należy do przedziału.

A12 • Procent danej liczby

Poziom: 4–6

$$p\%\ \text{liczby}\ W\ \text{to}\ C = \frac{p}{100} \cdot W.$$

Rysunek: Cały pasek: 80 zł; jedna z czterech równych części: 20 zł.



Warunki:

W zadaniach o części całości przyjmij $W \geq 0$ i $0 \leq p \leq 100$. Sto procent oznacza całość; procenty mogą też opisywać wielokrotności.

Przykład:

$$25\%\ \text{z}\ 80\ \text{zł} = \frac{25}{100} \cdot 80\ \text{zł} = 20\ \text{zł}.$$

Kontrola: jedna czwarta z 80 to 20!

A13 • Całość na podstawie części

Poziom: 7–8

Jeśli $C = \frac{p}{100} \cdot W$, to $W = \frac{100C}{p}$.

Warunki: $p \neq 0$. W zadaniu o dodatniej części całości: $C > 0$ i $0 < p \leq 100$. Ustal, której całości dotyczy procent.

Przykład: 15% pewnej kwoty to 30 zł.

$$W = \frac{100 \cdot 30}{15} = 200 \text{ zł}.$$

Kontrola: $0{,}15 \cdot 200 = 30$.

Rysunek: Schemat: 15% to 30 zł. Dzielimy 30 zł przez 0,15 i otrzymujemy całość: 200 zł.

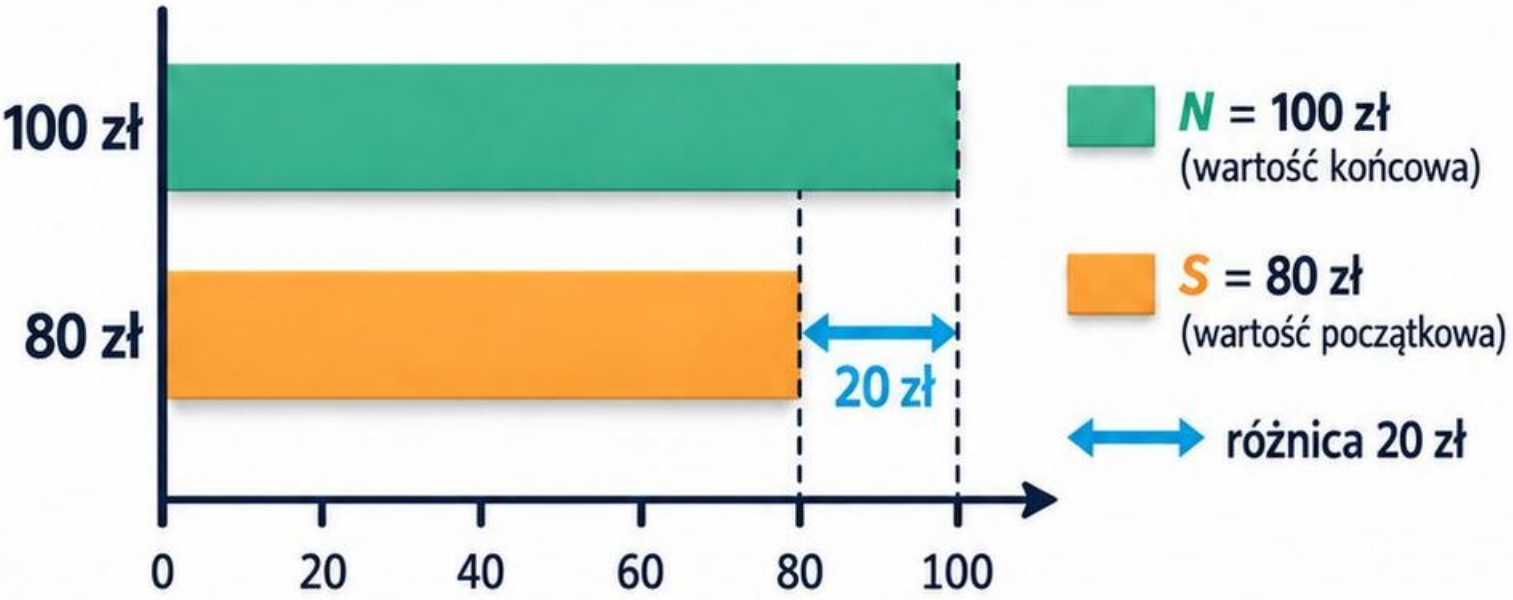


A14 • Zmiana procentowa

Poziom: 7–8

$$\text{Zmiana procentowa} = \frac{N - S}{S} \cdot 100\%,$$

gdzie S to wartość początkowa, N końcowa.



Rysunek: Paski 80 i 100 zł mają tę samą skalę; różnica wynosi 20 zł.

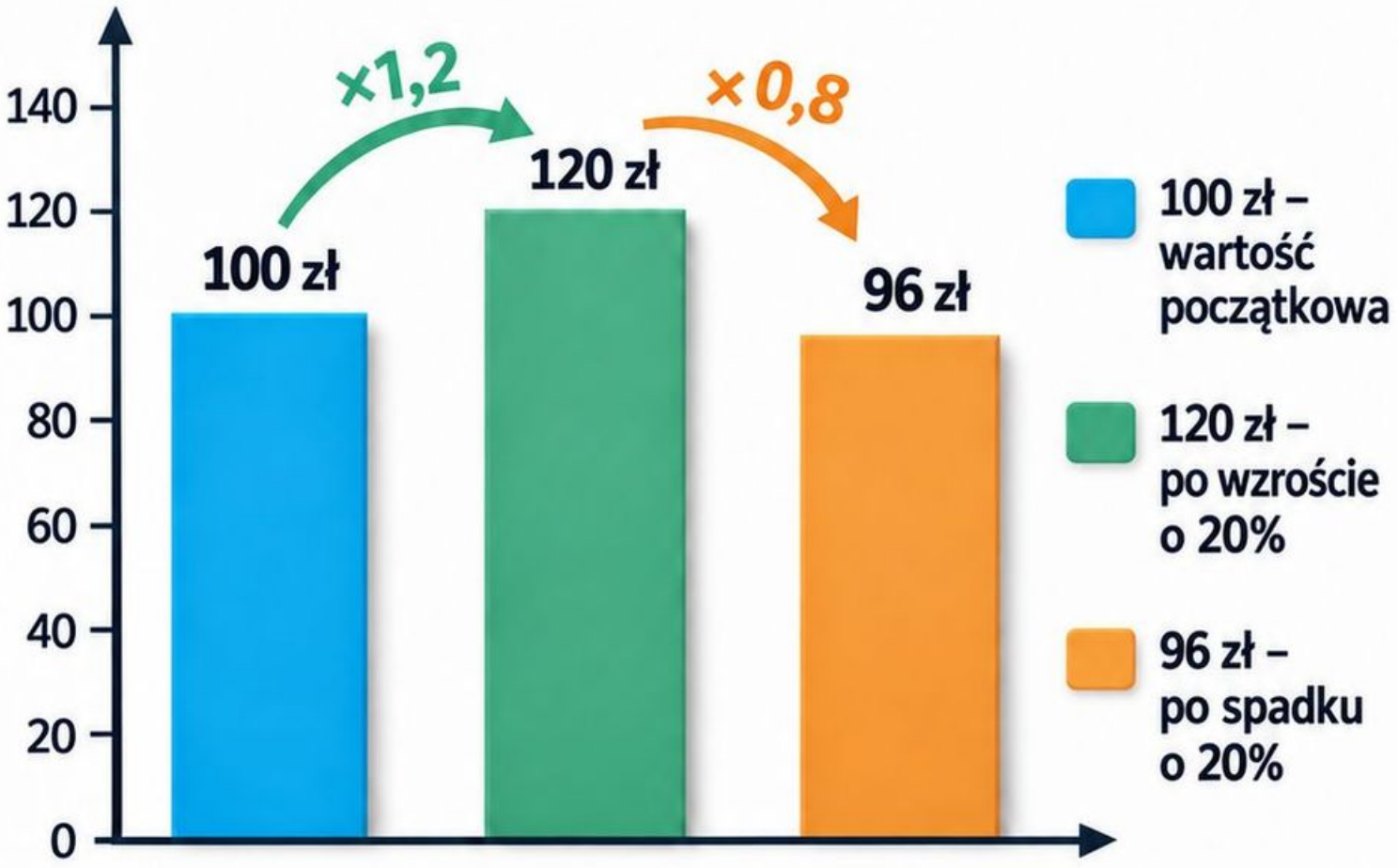
Warunki: $S > 0$. Wzrost daje wynik dodatni, spadek ujemny. Podstawą porównania jest zawsze wartość początkowa.

Przykład: Cena rośnie z 80 do 100 zł:
$(100 - 80)/80 \cdot 100\% = 25\%$.
Spadek ze 100 do 80 zł wynosi 20%.

A15 • Kolejne zmiany procentowe

Poziom: 7–8

$$W_1 = W_0\left(1 + \frac{p}{100}\right);\ W_2 = W_1\left(1 - \frac{q}{100}\right).$$



Rysunek: Paski przedstawiają kolejno 100 zł, 120 zł i 96 zł.

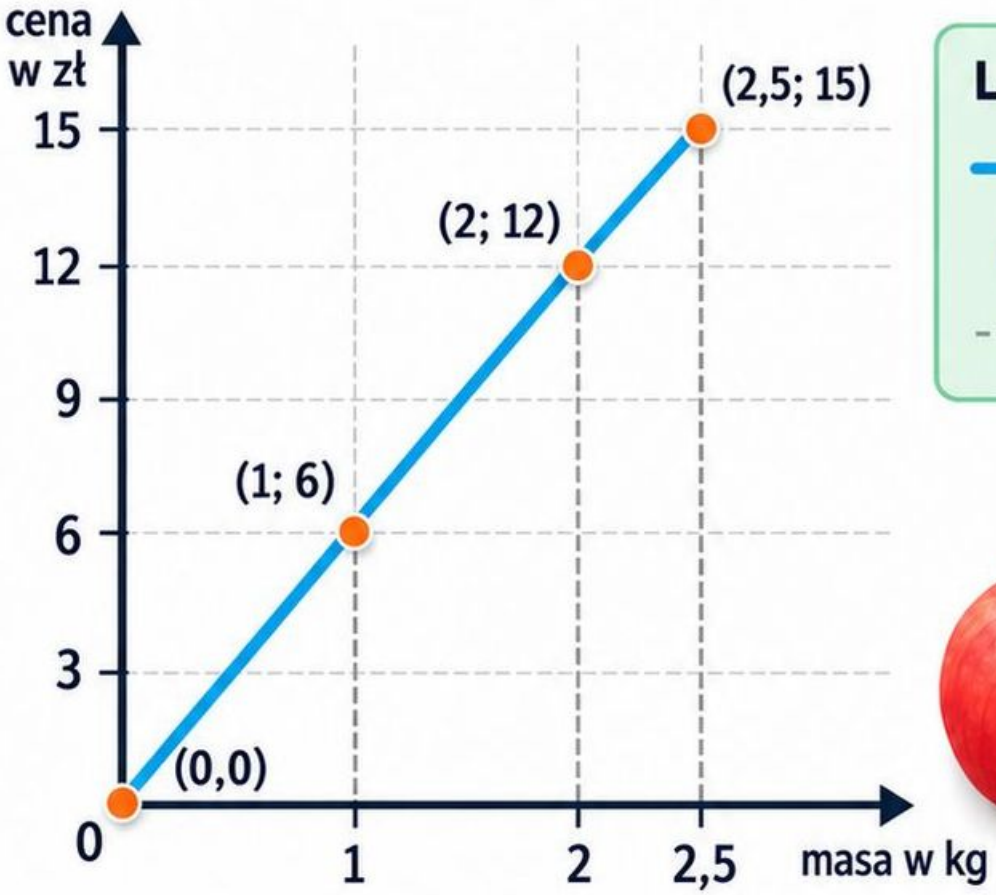
Warunki: $W_0 > 0,\ p \geq 0,\ 0 \leq q \leq 100.$
Każda zmiana odnosi się do aktualnej wartości.
Procentów kolejnych zmian nie dodajemy mechanicznie.

Przykład: 100 zł po wzroście o 20%: 120 zł.
Po spadku o 20%: 96 zł. Łączna zmiana: –4%.

A16 • Proporcjonalność prosta

Poziom: 7–8

$$y = kx;\ \text{dla } x \neq 0 \text{ iloraz } \frac{y}{x} = k \text{ jest stały.}$$



Legenda:

- wykres $y = 6x$
- zaznaczone punkty
- linie pomocnicze



Warunki: Wielkości są wprost proporcjonalne tylko wtedy, gdy mają stały iloraz i model przechodzi przez punkt (0,0). Opłata stała zaburza tę zależność.

Przykład: 1 kg jabłek kosztuje 6 zł.
Dla $x = 2{,}5$ kg: $y = 6 \cdot 2{,}5 = 15$ zł.

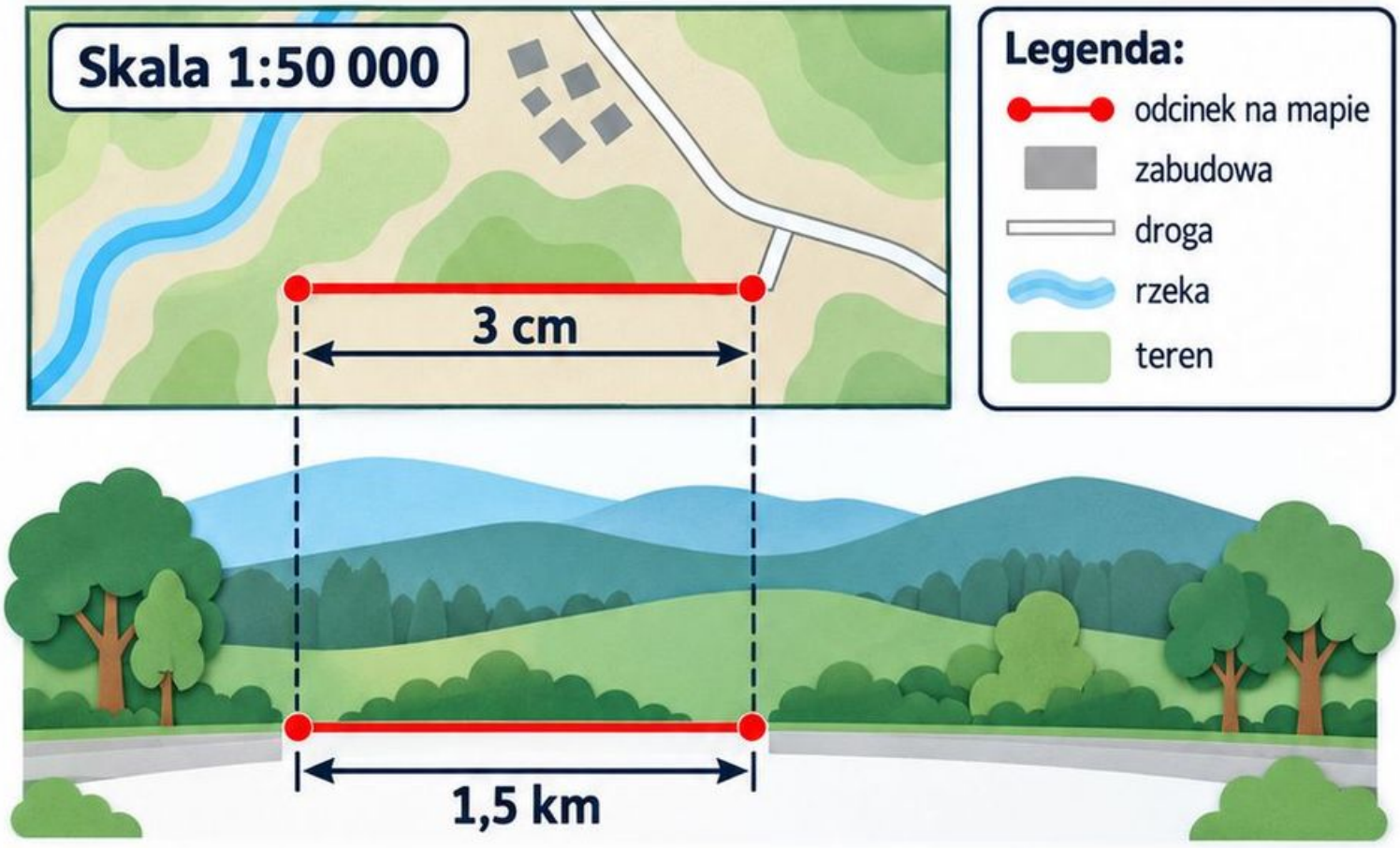
Rysunek: Osie: masa w kg i cena w zł; zaznaczono punkt (2,5; 15).

A17 • Skala mapy

Poziom: 4–6

Skala 1:*n* oznacza:
długość rzeczywista = *n* · długość na planie.

Warunki: ***n*** **> 0. Przed obliczeniem sprowadź długości do tych samych jednostek. Skala długości nie jest skalą pola.**



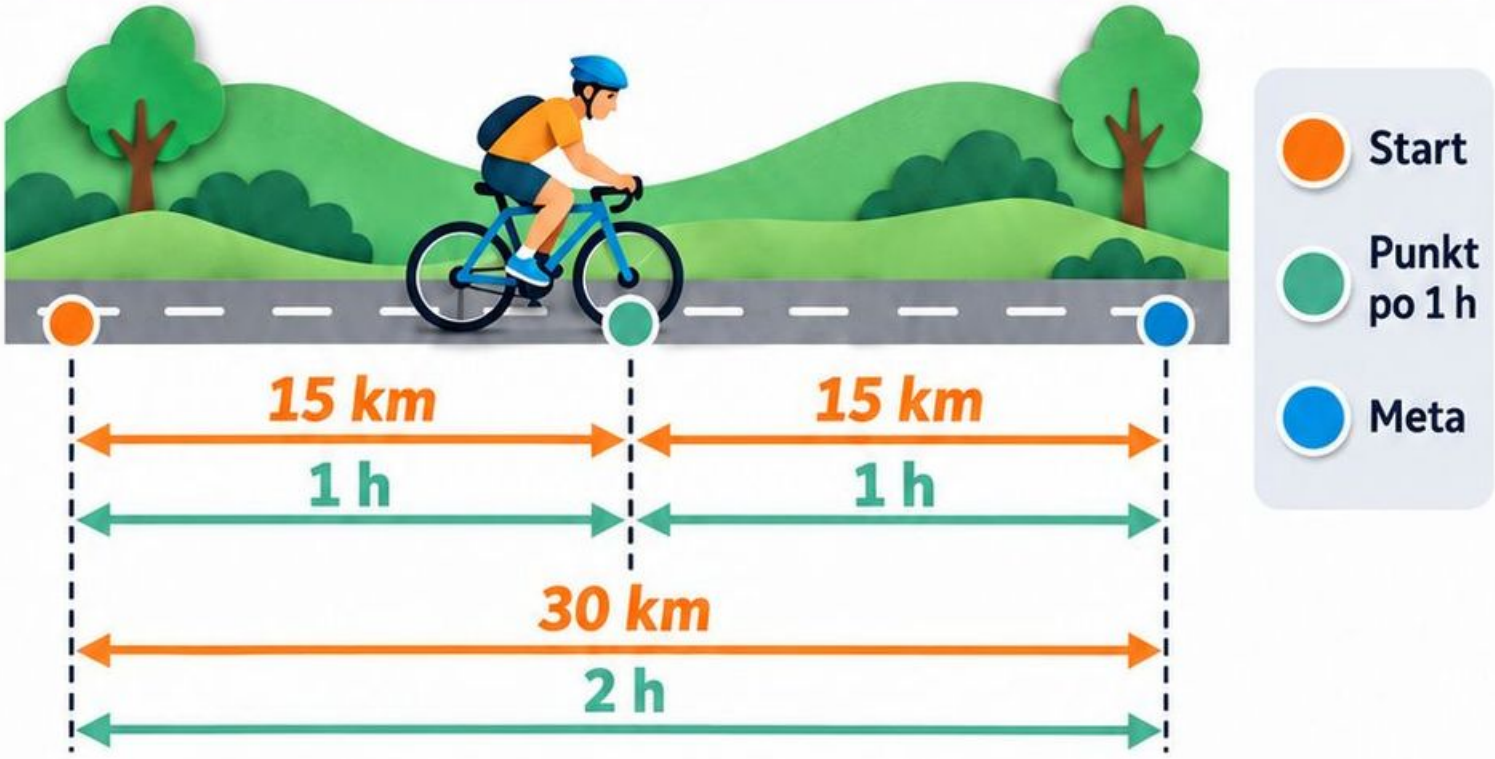
Przykład: Na mapie 1:50 000 odcinek ma 3 cm.
W terenie: 150 000 cm = 1500 m = 1,5 km.

Rysunek: Odcinek 3 cm na mapie odpowiada 1,5 km w terenie.

A18 • Droga, prędkość i czas

Poziom: 4–6

$$v = \frac{s}{t};\ s = vt;\ t = \frac{s}{v}.$$



Rysunek: Cała trasa: 30 km; łączny czas: 2 h.

Warunki: Dla prędkości średniej $t > 0$; wzór na czas wymaga $v > 0$. Droga $s \geq 0$. Używaj zgodnych jednostek, np. km, h, km/h.

Przykład: Rowerzysta przebył 30 km w 2 h.

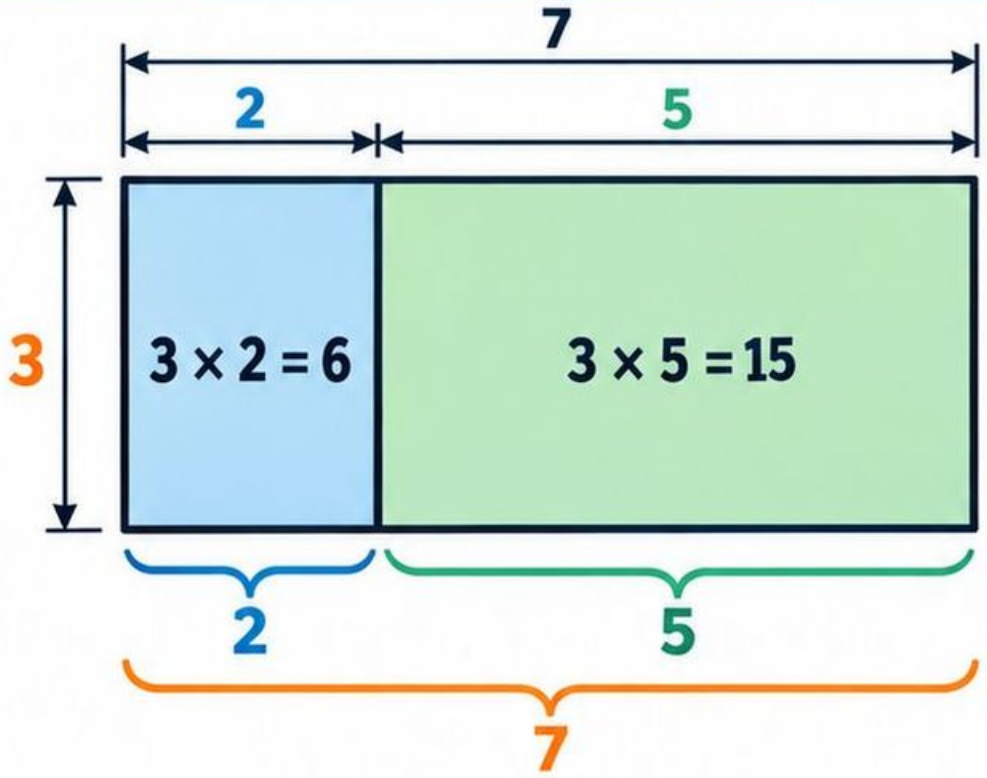
$v = \frac{30}{2} = 15$ km/h. To średnia z całej podróży.

A19 • Wyrażenia i rozdzielność

Poziom: 7–8

$$a(b+c) = ab + ac;\ a(b-c) = ab - ac.$$

Rysunek: Prostokąt 3 × 7 rozcięto na części 3 × 2 i 3 × 5.



Legenda:

- Część 3 × 2 (pole = 6)
- Część 3 × 5 (pole = 15)
- Wysokość 3
- Szerokość 2
- Szerokość 5
- Cała szerokość 7

$$3(2+5) = 6 + 15.$$

Warunki:

Tożsamości są prawdziwe dla wszystkich liczb rzeczywistych.
Łącz tylko wyrazy podobne: mają te same zmienne w tych samych potęgach.

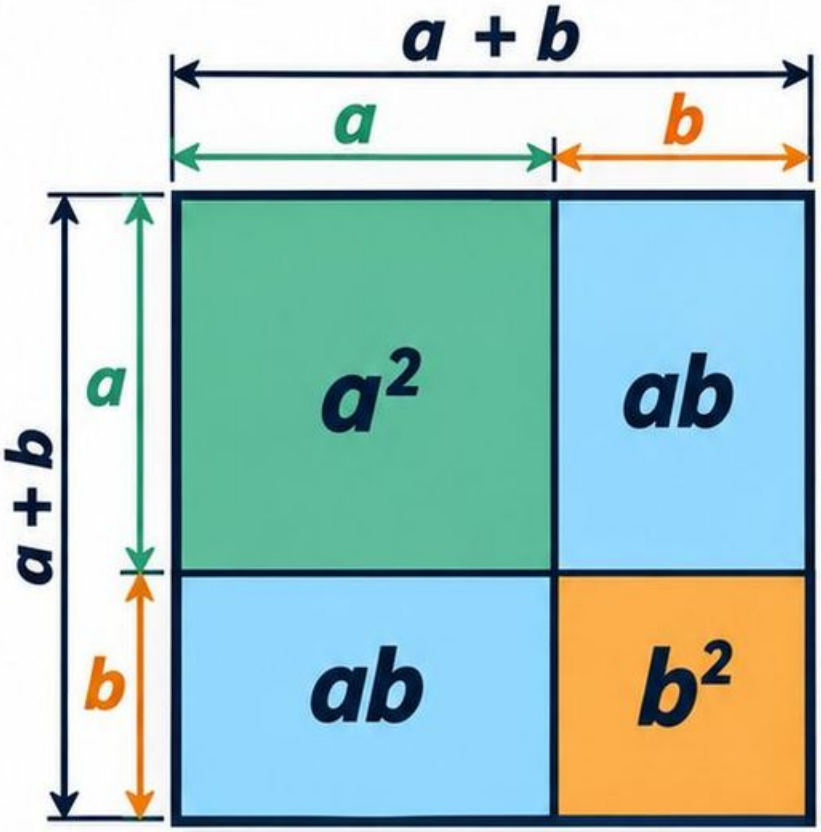
Przykład:

$3(2x-5) + x = 6x - 15 + x = 7x - 15.$
Dla $x = 3$ wynik wynosi 6.

A20 • Wzory skróconego mnożenia

Poziom: L

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$



Rysunek:
Kwadrat o boku $a + b$ zawiera pola a^2, ab, ab i b^2.

- pole a^2 (kwadrat o boku a)
- pole ab (prostokąt o bokach a i b)
- pole ab (prostokąt o bokach a i b)
- pole b^2 (kwadrat o boku b)

Warunki:

Tożsamości obowiązują dla rzeczywistych a, b.
Rysunek pól ilustruje pierwszy wzór przy $a, b > 0$.

Przykład:

$(10 + 2)^2 = 100 + 40 + 4 = 144$.
Środkowy składnik to **$2ab$**, nie ab.

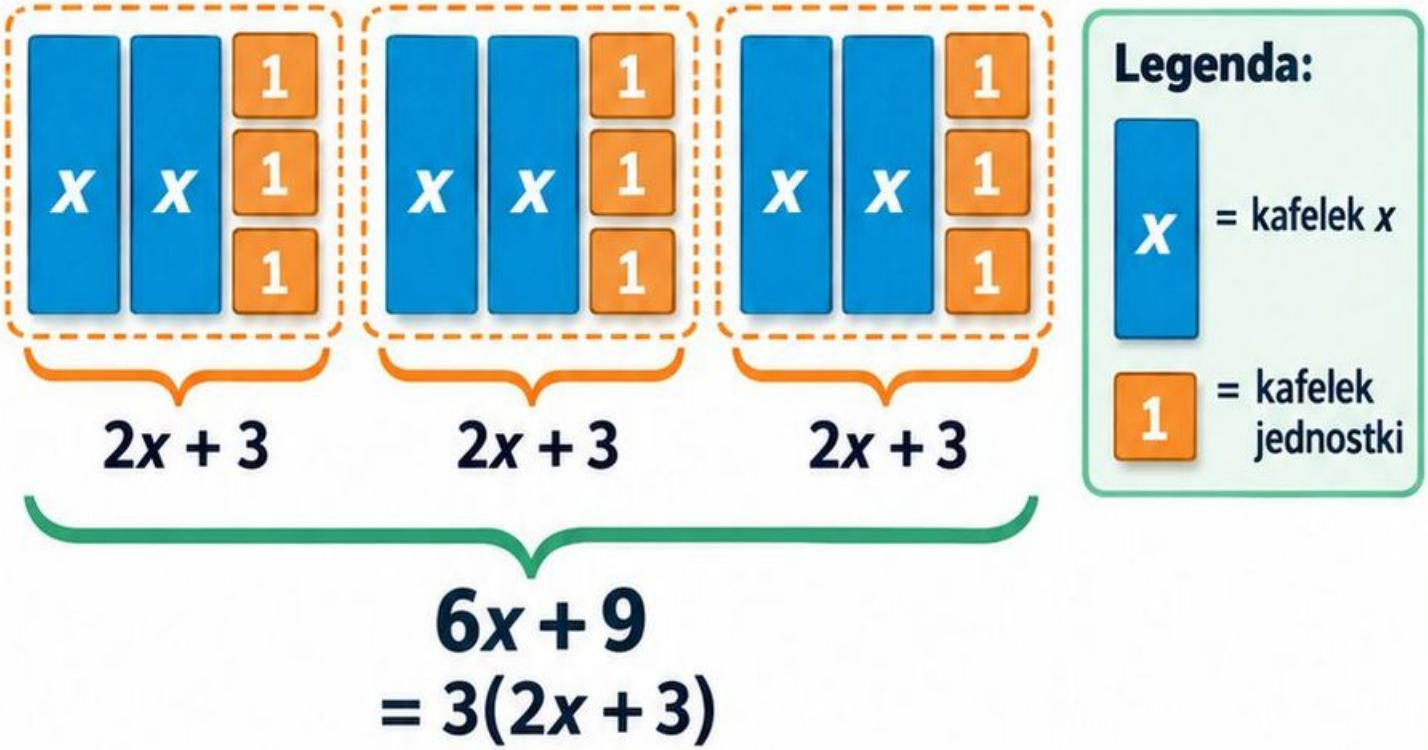
A21 • Rozkład na czynniki

Poziom: 7–8

$$ab + ac = a(b + c).$$

Dodatkowo w liceum: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Rysunek: Trzy grupy zawierają po dwa kafelki x i trzy jednostki.



Warunki: Wyłącz wspólny czynnik wszystkich składników. Rozkład zapisuje sumę jako iloczyn; nie oznacza jeszcze rozwiązania równania.

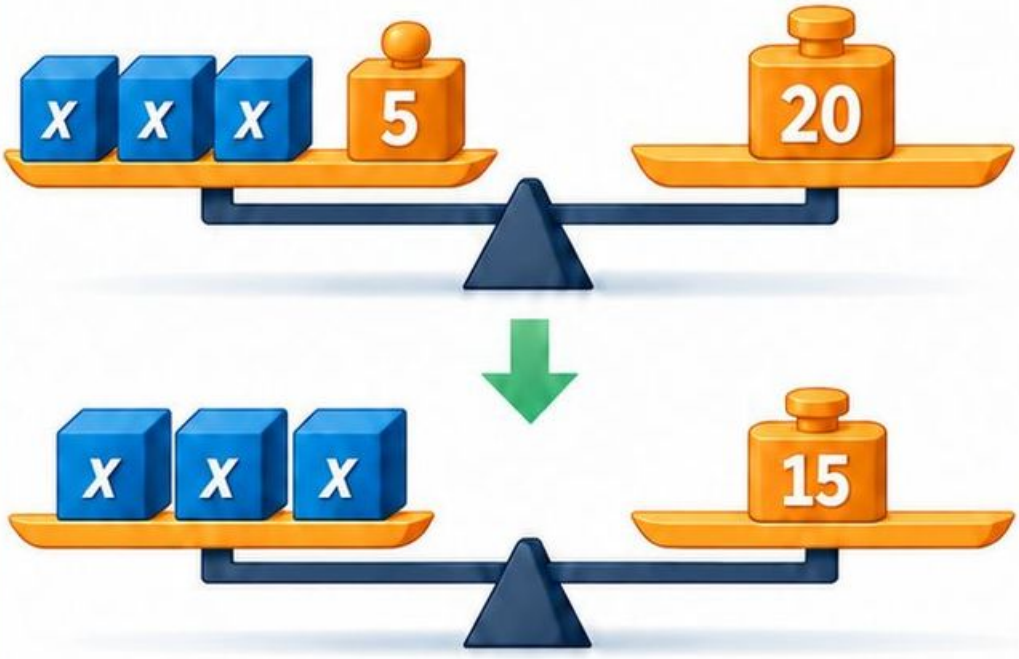
Przykład: $6x + 9 = 3(2x + 3)$.
Kontrola dla $x = 2$: $21 = 3 \cdot 7$.

A22 • Równanie liniowe

Poziom: 7–8

$$ax + b = c.\ \text{Dla } a \neq 0:\ x = \frac{c - b}{a}.$$

Warunki: Dodawaj tę samą liczbę do obu stron i dziel obie strony przez ten sam niezerowy współczynnik. Dla $a = 0$ rozważ osobno brak lub nieskończenie wiele rozwiązań.



Legenda:

x – pudełko x (o tej samej wadze)

5 – odważnik (wartość podana na etykiecie)

Rysunek: Waga porównuje trzy pudełka x i 5 jednostek z 20 jednostkami.

Przykład: $3x + 5 = 20 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5.$

Kontrola: $3 \cdot 5 + 5 = 20.$

A23 • Nierówność liniowa

Poziom: L

Jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$.
Jeśli $c < 0$, to $ac > bc$.

Rysunek:

Pusty punkt przy -2 i półprosta w lewo oznaczają $x < -2$.





$x < -2$

punkt nie należy do zbioru (wyłączony)

zaznaczona część zbioru (półprosta w lewo)

rozwiązanie nierówności

Warunki:

Przy mnożeniu lub dzieleniu przez liczbę ujemną odwróć znak nierówności. Nie dziel przez wyrażenie o nieznanym znaku bez analizy przypadków.

Przykład:

$-2x + 3 > 7 \rightarrow -2x > 4 \rightarrow x < -2.$

Próba: $x = -3$ daje $9 > 7$.

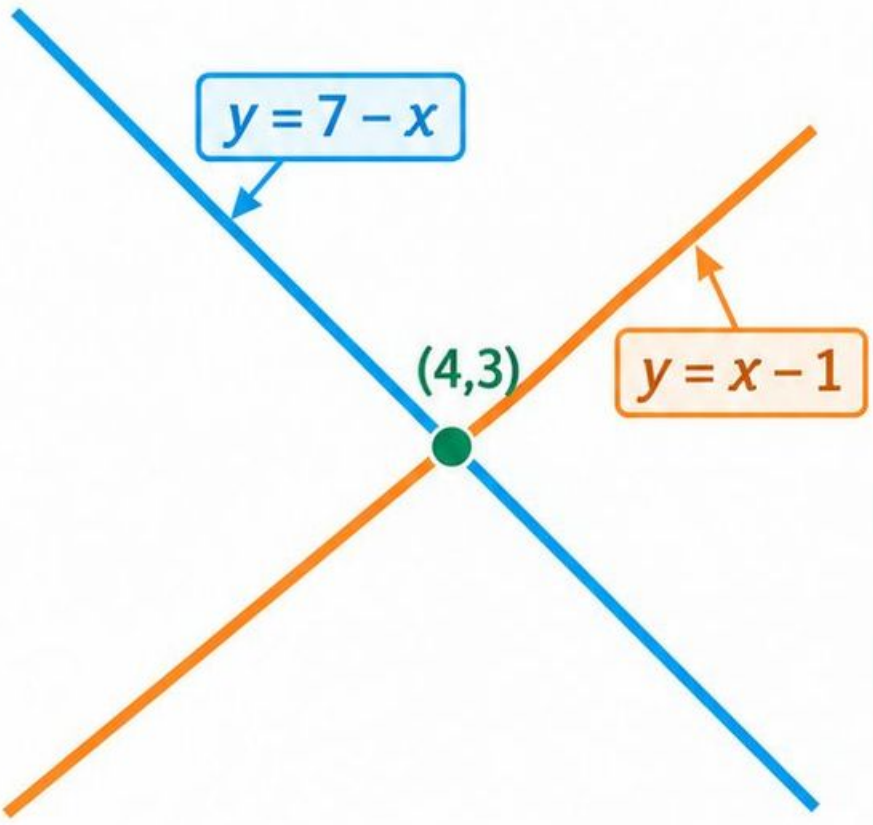
A24 • Układ równań liniowych

Poziom: L

Układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu to para (x, y), która spełnia jednocześnie oba równania.



Legenda:

- Prosta $y = 7 - x$
- Prosta $y = x - 1$
- Punkt przecięcia (4,3)

Rysunek: Proste $y = 7 - x$ i $y = x - 1$ przecinają się w (4,3).

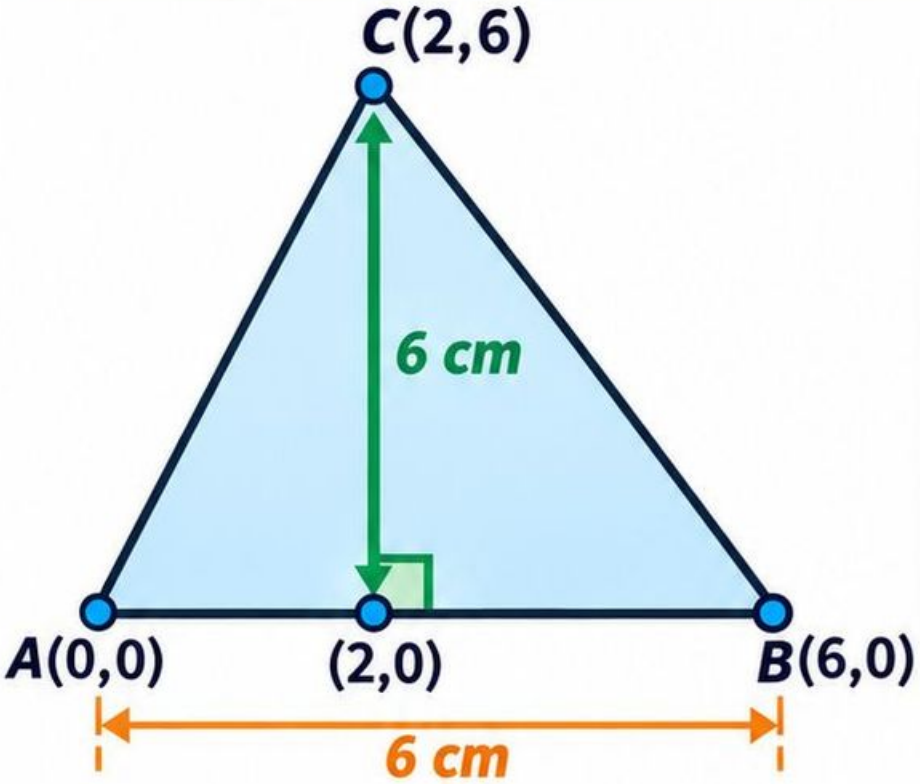
Warunki: Dodawanie równań pozwala usunąć niewiadomą o przeciwnych współczynnikach. Dwie proste mogą mieć jeden punkt wspólny, pokrywać się albo być równoległe.

Przykład: $x + y = 7$ oraz $x - y = 1$. Dodaj: $2x = 8$, więc $x = 4$ i $y = 3$. Kontrola: $4 + 3 = 7$, $4 - 3 = 1$.

A25 • Przekształcanie wzorów

Poziom: 7–8

$$P = \frac{ah}{2} \rightarrow 2P = ah \rightarrow h = \frac{2P}{a}.$$



Legenda:

- Wierzchołek trójkąta
- Boki trójkąta
- Podstawa $a = 6$ cm
- Wysokość $h = 6$ cm (prostopadła)
- Kąt prosty (90°)

Warunki: Przekształcaj obie strony tak samo. Dzielenie przez a wymaga $a \neq 0$; dla trójkąta $a > 0$ i $h > 0$. Jednostki obu stron muszą się zgadzać.

Przykład: $P = 18\ \text{cm}^2$, $a = 6$ cm. $h = \frac{2 \cdot 18}{6} = 6$ cm.

Kontrola: $\frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ \text{cm}^2$.

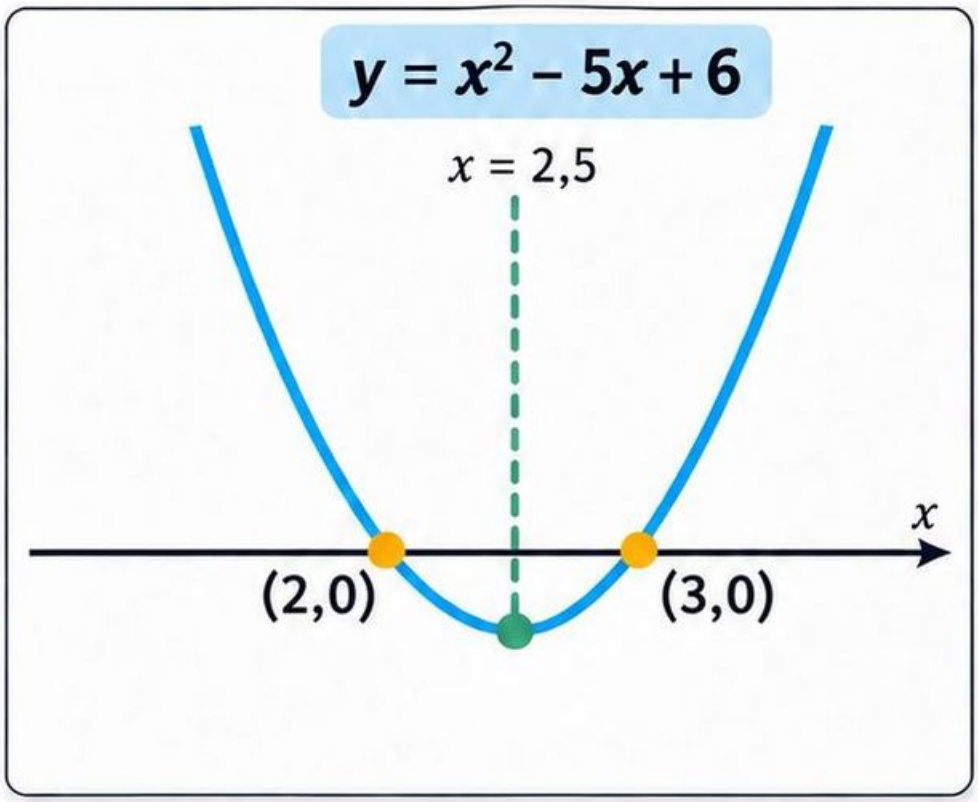
Rysunek: Podstawa 6 cm i prostopadła wysokość 6 cm wyznaczają pole 18 cm².

A26 • Równanie kwadratowe

Poziom: L

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.\ \Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\text{Dla } \Delta \geq 0\text{: } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$



Legenda:

- parabola $y = x^2 - 5x + 6$
- punkty przecięcia z osią x (2,0) i (3,0)
- wierzchołek (2,5; −0,25)
- oś symetrii $x = 2,5$

Rysunek:

Parabola przecina oś x w punktach (2,0) i (3,0).

Warunki:

$\Delta > 0$: dwa rozwiązania rzeczywiste. $\Delta = 0$: jedno rozwiązanie.
$\Delta < 0$: brak rozwiązań rzeczywistych.

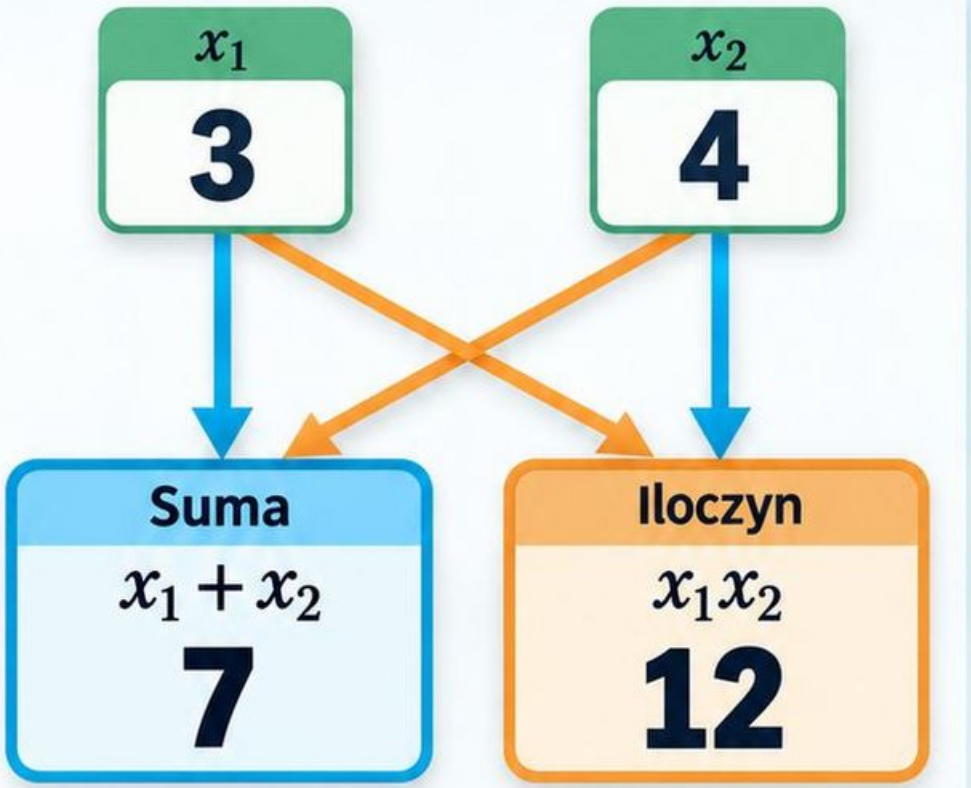
Przykład:

$x^2 - 5x + 6 = 0$. $\Delta = 25 - 24 = 1$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
Kontrola: $4 - 10 + 6 = 0$.

A27 • Wzory Viète'a

Poziom: L

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a};\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \text{ dla } ax^2 + bx + c = 0.$$



Legenda:

- x_1 = 3 — pierwszy pierwiastek $x_1 = 3$
- x_2 = 4 — drugi pierwiastek $x_2 = 4$
- Suma = 7 — suma pierwiastków $x_1 + x_2 = 7$
- Iloczyn = 12 — iloczyn pierwiastków $x_1 x_2 = 12$

Warunki:

$a \neq 0$; w tej planszy $\Delta \geq 0$ i pierwiastki są rzeczywiste, liczone z krotnością. Przy $\Delta = 0$ obie wartości są równe.

Przykład:

$x^2 - 7x + 12 = 0$.

Liczby 3 i 4 mają sumę 7 i iloczyn 12, więc są pierwiastkami.

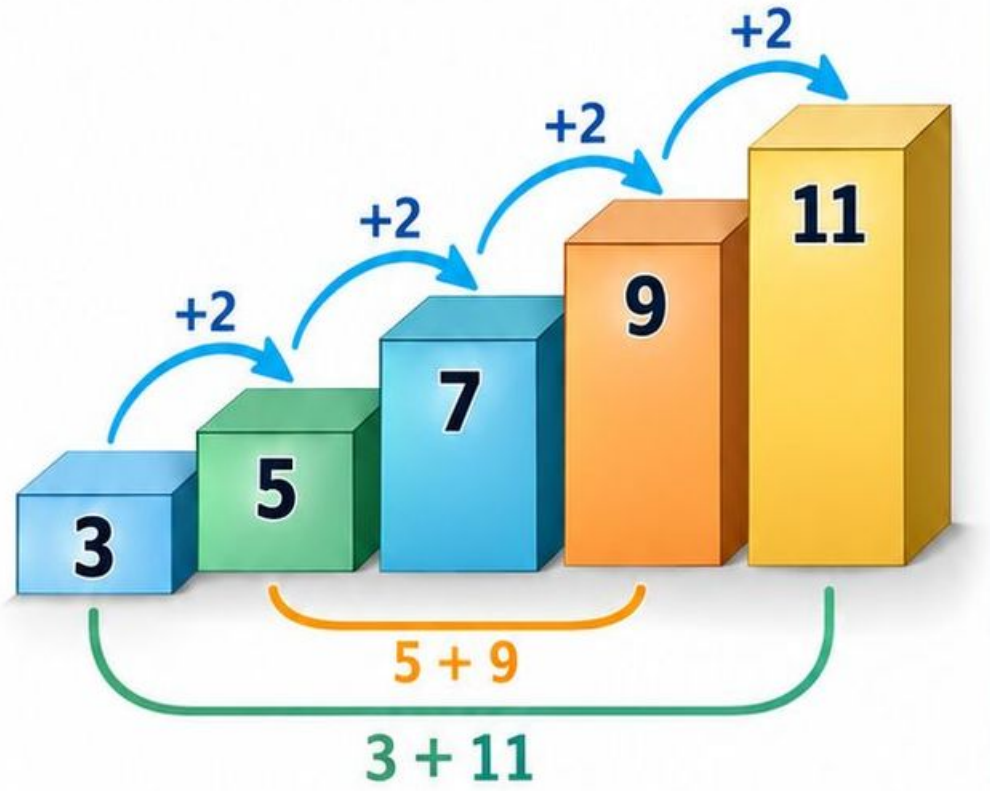
Rysunek:

Karty 3 i 4 łączą się w sumę 7 oraz iloczyn 12.

A28 • Ciąg arytmetyczny

Poziom: L

$$a_n = a_1 + (n-1)r;\ S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$



Legenda:

- – wyraz 3
- – wyraz 5
- – wyraz 7
- – wyraz 9
- – wyraz 11
- – różnica +2 między wyrazami
- – para 5 + 9
- – para 3 + 11

Rysunek: Wyrazy 3, 5, 7, 9, 11 łączą strzałki oznaczone +2.

Warunki: n jest dodatnią liczbą całkowitą.
Różnica $r = a_{n+1} - a_n$ jest stała.
S_n oznacza sumę pierwszych n wyrazów.

Przykład: $a_1 = 3, r = 2.$

$$a_5 = 3 + 4 \cdot 2 = 11;\ S_5 = \frac{5(3 + 11)}{2} = 35.$$

A29 • Ciąg geometryczny

Poziom: L

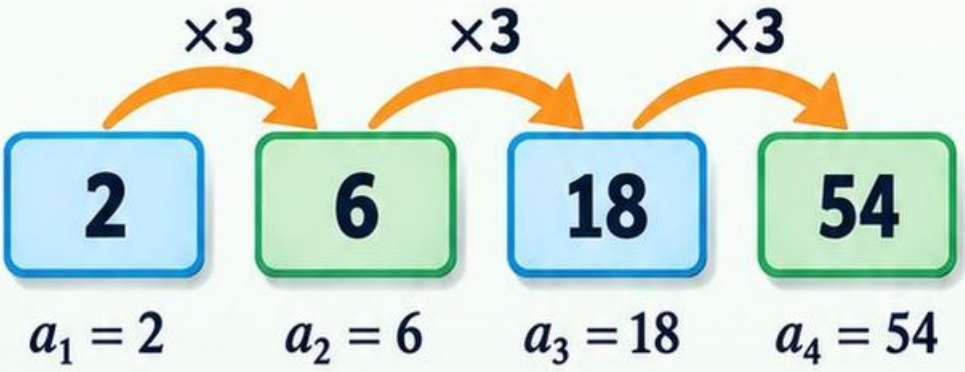
Wzory

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Dla $q \neq 1$: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. | Dla $q = 1$: $S_n = na_1$.

Rysunek

Wyrazy 2, 6, 18, 54 łączą strzałki oznaczone ×3.



Legenda

2 – wyraz ciągu

×3 – mnożenie przez 3 (iloraz $q = 3$)

Warunki

Warunki: $n \geq 1$ jest całkowite, a_1 i q rzeczywiste.
Dla $q = 0$ pierwszy wyraz określamy oddzielnie; dalsze są zerowe.
Nie wyznaczaj ilorazu przez dzielenie przez zero.

Przykład

Przykład: $a_1 = 2,\ q = 3$.
Wyrazy: 2, 6, 18, 54.

$$S_4 = \frac{2(1-81)}{1-3} = 80.$$

A30 • Współrzędne i odległość

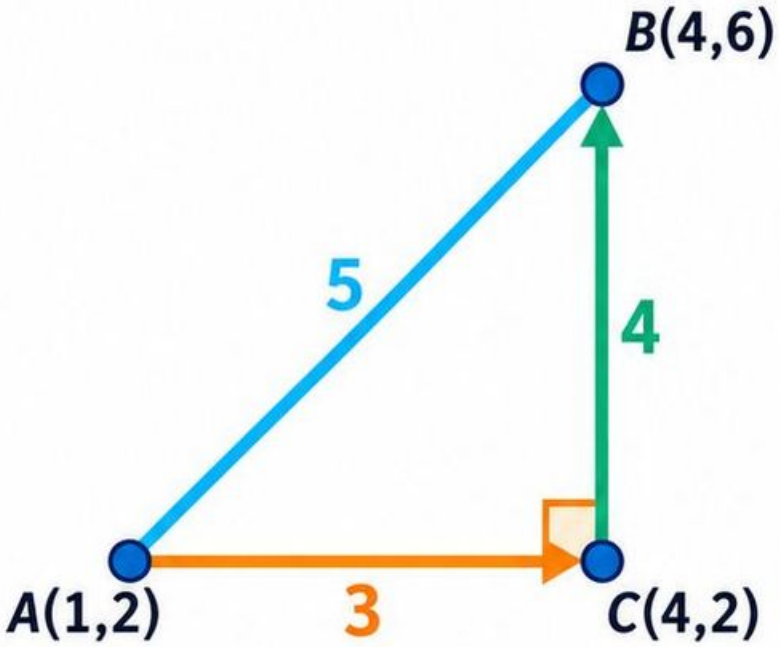
Poziom: L

Wzór:

Dla $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Rysunek: $A(1,2)$, $B(4,6)$; pozioma różnica to 3, pionowa 4.



Legenda:

- $A(1,2)$ – punkt A
- $B(4,6)$ – punkt B
- $C(4,2)$ – punkt pomocniczy
- odcinek poziomy o długości 3
- odcinek pionowy o długości 4
- odcinek AB o długości 5
- kąt prosty (90°)

Warunki:

Układ kartezjański ma prostopadłe osie i jednakową jednostkę długości na obu osiach.

$d \geq 0$.

Przykład:

$A(1,2)$, $B(4,6)$.

Różnice: 3 i 4.

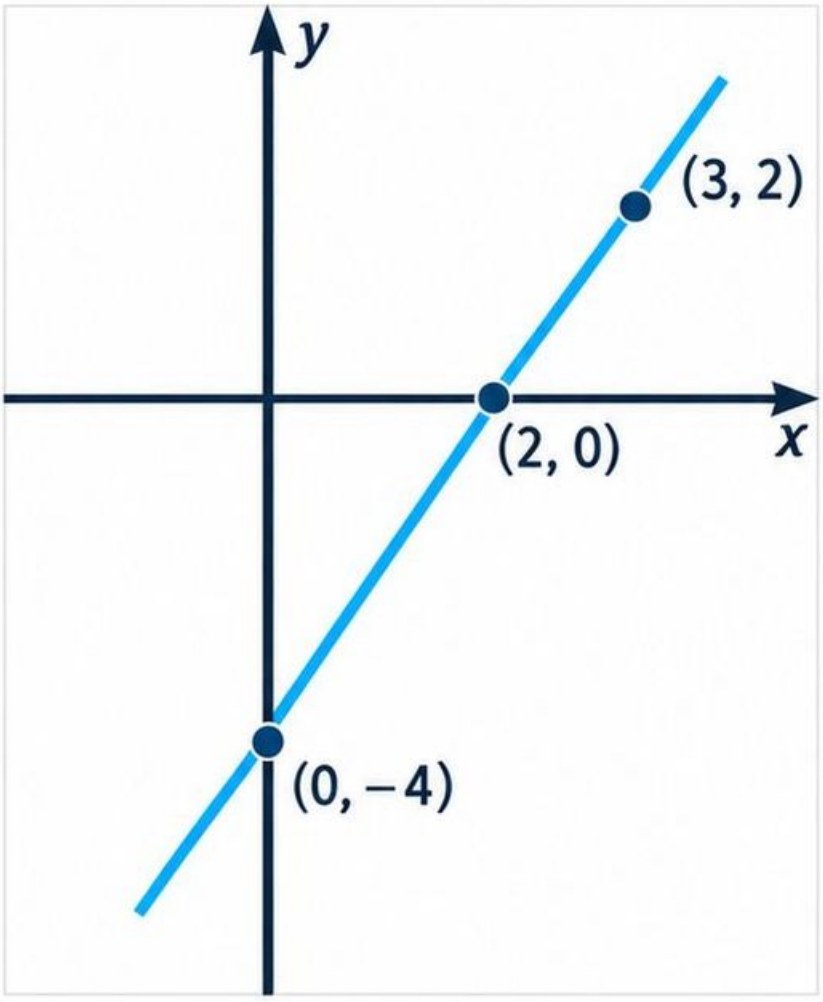
$d = \sqrt{(9 + 16)} = 5$.

A31 • Funkcja liniowa

Poziom: L

$$f(x) = ax + b.$$

Dla $a \neq 0$ miejsce zerowe to $x_0 = \frac{-b}{a}$.



Rysunek:

Prosta przechodzi przez $(0, -4)$, $(2, 0)$ i $(3, 2)$.

Legenda:

- wykres funkcji liniowej
- zaznaczone punkty $(0, -4)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$
- wzrost o 2 (przyrost wartości y)
- przesunięcie o 1 (przyrost wartości x)

Warunki:

Dziedzina: $\mathbb{R}$, jeśli zadanie nie ogranicza x.

$a > 0$: funkcja rosnąca;

$a < 0$: malejąca; $a = 0$: stała.

Punkt $(0, b)$ leży na wykresie.

Przykład:

$f(x) = 2x - 4$.

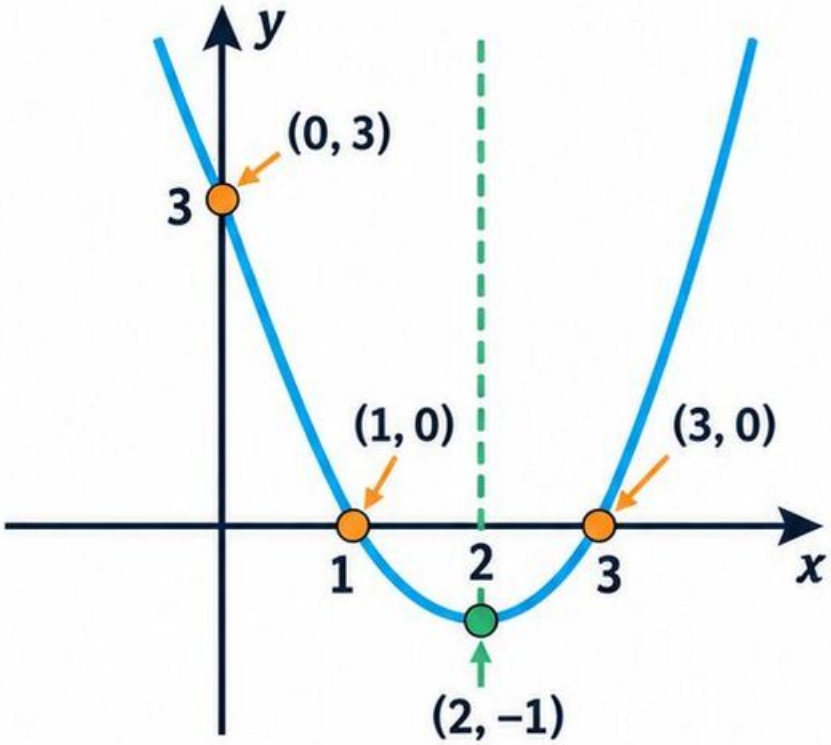
$f(3) = 2$; $x_0 = 2$.

Wykres przechodzi przez $(0, -4)$ i $(2, 0)$.

A32 • Parabola: postacie wzoru

Poziom: L

$$y = (x-2)^2 - 1$$



Rysunek:

Wierzchołek (2, −1), zera 1 i 3 oraz przecięcie osi y w 3.

- parabola $y = (x-2)^2 - 1$
- wierzchołek (2, −1)
- zera (1, 0) i (3, 0)
- przecięcie osi y (0, 3)
- oś symetrii $x = 2$

Ogólna:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

↔

Kanoniczna:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q.$$

↔

Iloczynowa:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Warunki:

$a \neq 0$. Postać iloczynowa z rzeczywistymi x_1, x_2 istnieje przy $\Delta \geq 0$. Wierzchołek ma współrzędne (p, q).

Przykład:

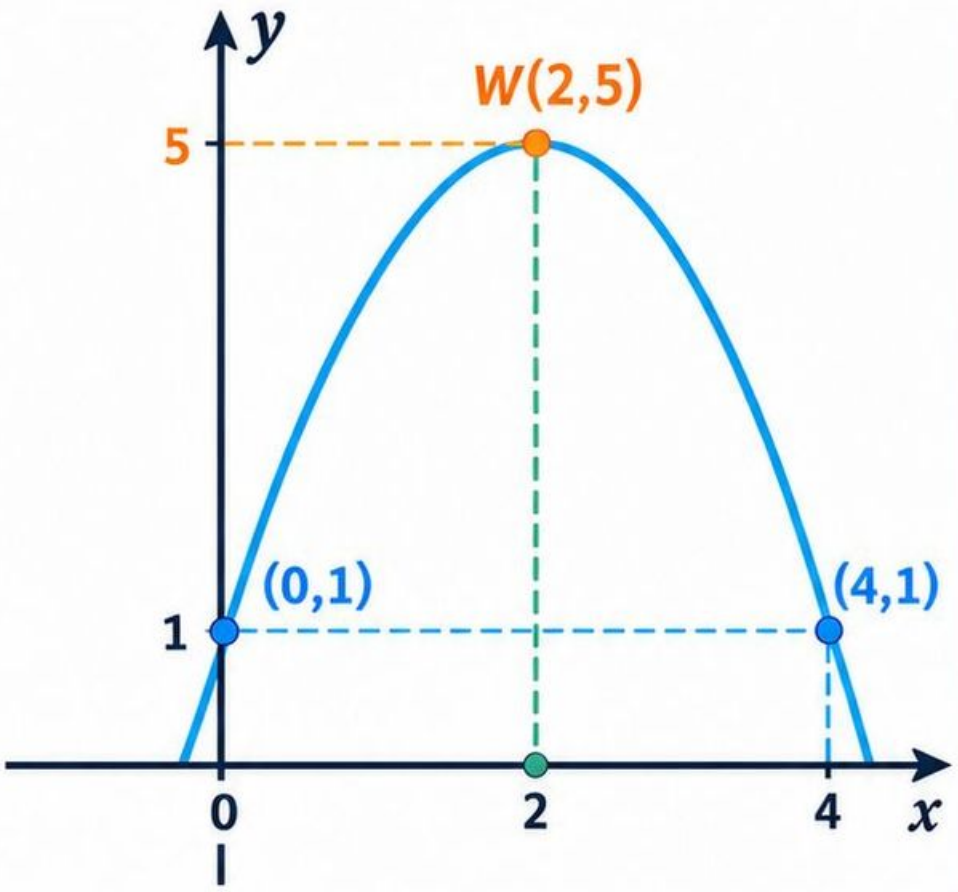
$$x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 = (x-1)(x-3).$$

Wszystkie postacie opisują tę samą funkcję.

A33 • Wierzchołek i ekstremum

Poziom: L

$$p = -\frac{b}{2a};\ q = -\frac{\Delta}{4a}.$$ **Wierzchołek $W(p,q)$.**



- **$W(2,5)$** – wierzchołek (parabola ma tu maksimum)
- **$(0,1)$** – punkt przecięcia z osią Oy
- **$(4,1)$** – punkt symetryczny względem prostej $x = 2$
- **$x = 2$** – oś symetrii
- **$y = -(x-2)^2+5$** – wykres funkcji

Rysunek:

Parabola skierowana ramionami w dół ma wierzchołek $(2,5)$.

Warunki:

$a \neq 0$. Na całej $\mathbb{R}$: dla $a > 0$ minimum wynosi q; dla $a < 0$ maksimum wynosi q. Przy ograniczonej dziedzinie uwzględnij również końce przedziału.

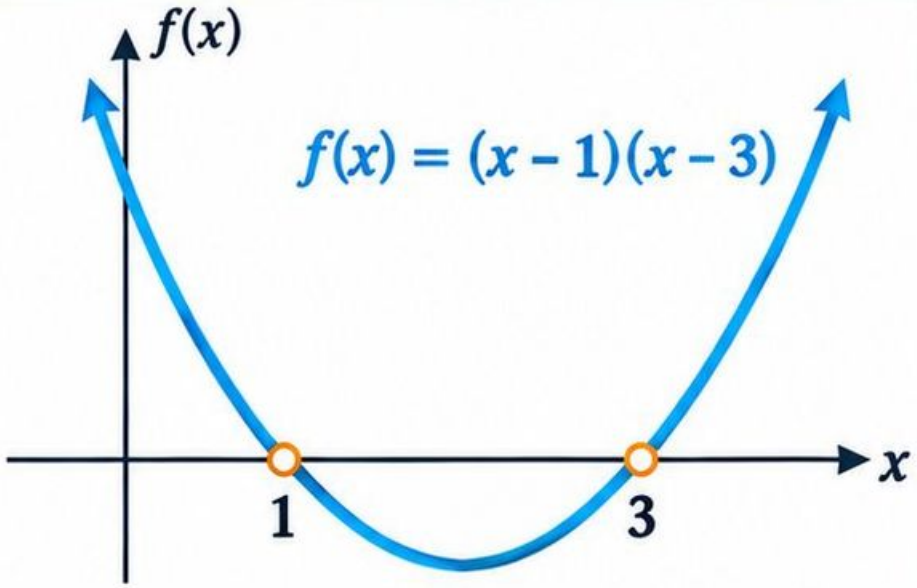
Przykład:

$f(x) = -x^2 + 4x + 1$. $p = 2$, $q = 5$. Największa wartość to 5 dla $x = 2$.

A34 • Miejsca zerowe i znak

Poziom: L

Dla $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, $x_1 < x_2$:
przy $a > 0$ funkcja jest dodatnia poza pierwiastkami i ujemna między nimi.



Legenda:

- wykres funkcji ($a > 0$)
- miejsce zerowe (wartość 0)
- obszar, gdzie $f(x) > 0$
- obszar, gdzie $f(x) < 0$

Rysunek: Tabela znaków: + dla $x < 1$; − dla $1 < x < 3$; + dla $x > 3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Warunki:

- Przy $a < 0$ znaki są odwrotne.
- W pierwiastkach wartość wynosi 0.
- Reguła dwóch przedziałów zewnętrznych wymaga dwóch różnych pierwiastków.

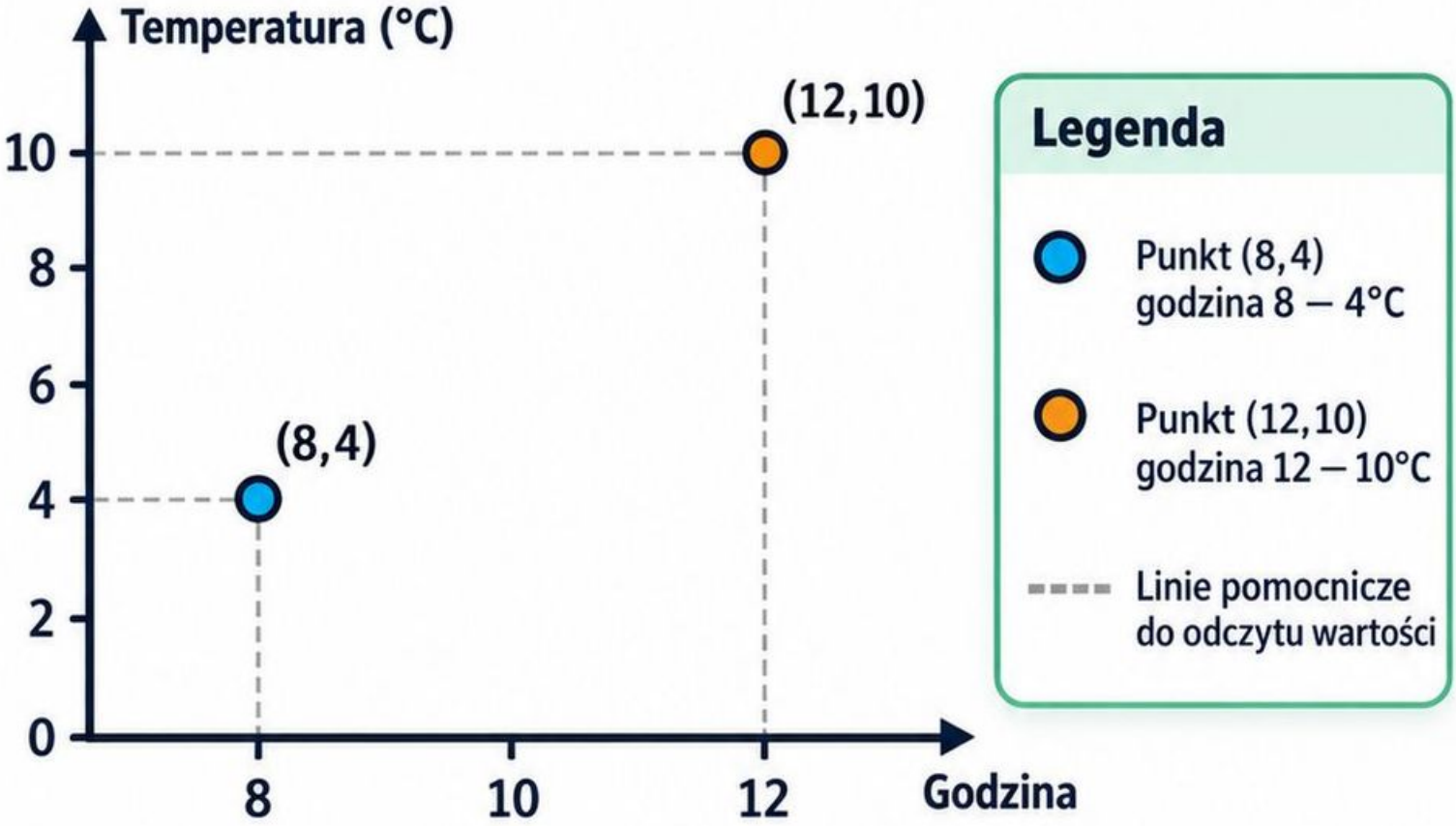
Przykład:

$f(x) = (x - 1)(x - 3)$. $f(x) < 0$ dla $1 < x < 3$;
$f(x) > 0$ dla $x < 1$ lub $x > 3$.

A35 • Odczytywanie wykresów

Poziom: 7–8

Punkt (x, y) na wykresie funkcji oznacza $y = f(x)$.
Przyrost wartości: $\Delta y = y_2 - y_1$.



Warunki:

Czytaj skalę każdej osi i jednostki. Nie zakładaj, że początek osi ma wartość 0 ani że odstępy oznaczają 1. Łącz punkty tylko wtedy, gdy model to uzasadnia.

Przykład:

Na wykresie temperatury:
$f(8) = 4°C$, $f(12) = 10°C$.
Wzrost: $10 - 4 = 6°C$.

Rysunek:

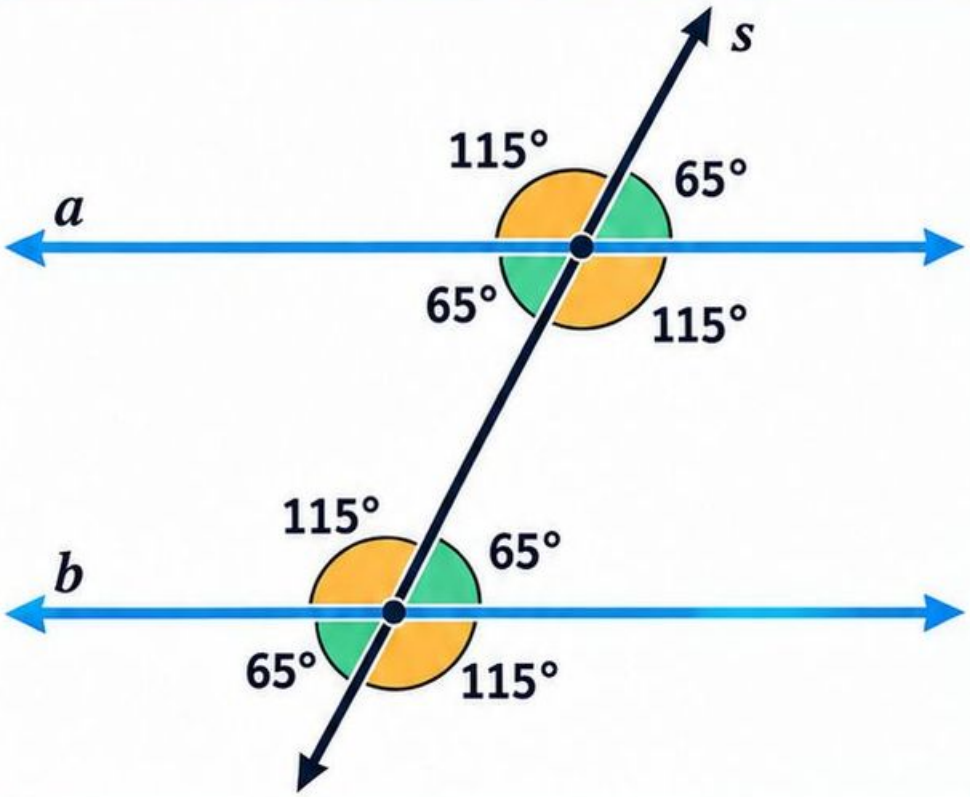
Punkty: godzina 8 – 4°C;
godzina 12 – 10°C.

A36 • Kąty i proste równoległe

Poziom: 4–6

Kąty przyległe sumują się do 180°. Kąty wierzchołkowe są równe.

Rysunek: Równoległe proste przecięto sieczną; kąty ostre mają 65°, rozwarte 115°.



Legenda:

- a, b – proste równoległe
- s – sieczna
- kąt ostry (65°)
- kąt rozwarty (115°)

$a \parallel b$

Warunki:

Przy dwóch prostych równoległych przeciętych sieczną kąty odpowiadające są równe.
Równoległość musi być podana lub uzasadniona.

Przykład:

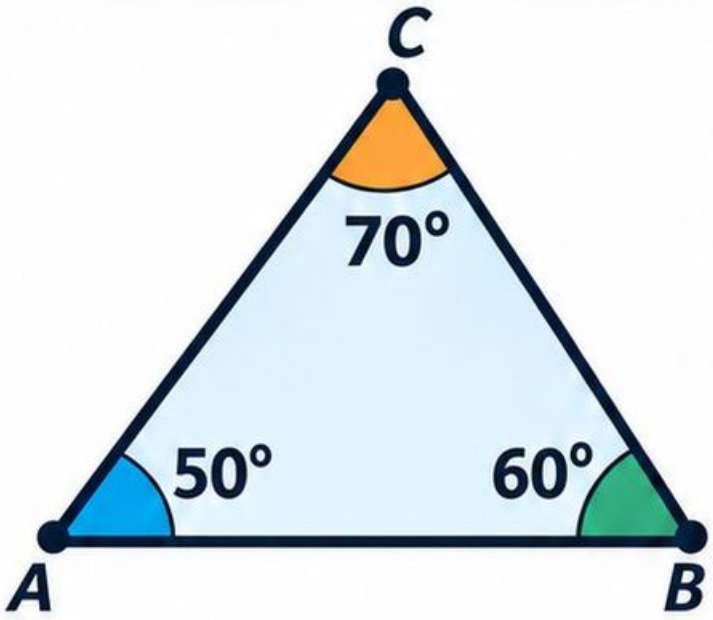
Kąt ma 65°. Jego kąt przyległy: 180° – 65° = 115°.
Kąt wierzchołkowy ma 65°.

A37 • Trójkąt i suma kątów

Poziom: 4–6

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Dla boków: $a + b > c,\ a + c > b,\ b + c > a.$



Rysunek: Kąty trójkąta: 50°, 60°, 70°; suma wynosi 180°.

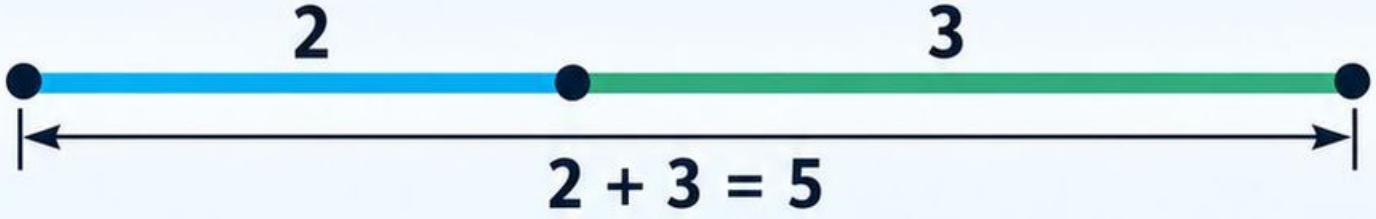
- $\alpha = 50^\circ$ (przy wierzchołku A)
- $\beta = 60^\circ$ (przy wierzchołku B)
- $\gamma = 70^\circ$ (przy wierzchołku C)

Warunki:

Dodatnie długości muszą spełniać nierówności trójkąta.
W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.

Przykład:

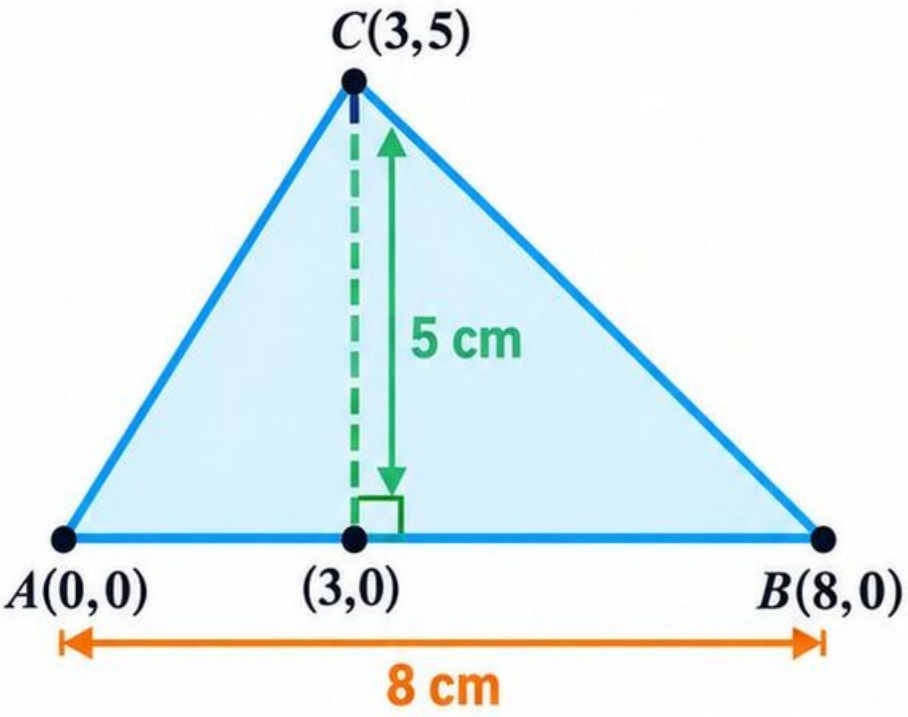
Kąty mają 50° i 60°. Trzeci: 180° – 50° – 60° = 70°.
Odcinki 2, 3, 5 nie tworzą trójkąta.



A38 • Pole trójkąta

Poziom: 4–6

$$P = \frac{a h_a}{2}.$$ W liceum także $$P = \frac{ab \cdot \sin \gamma}{2}.$$



Legenda:

- trójkąt *ABC*
- podstawa 8 cm (odcinek *AB*)
- wysokość 5 cm (odcinek z *C* do (3,0))
- kąt prosty (prostopadłość)
- pole trójkąta

Rysunek: Podstawa 8 cm, wysokość 5 cm; mały kwadrat oznacza prostopadłość.

Warunki: $a > 0$, $h_a > 0$; wysokość jest prostopadła do prostej zawierającej wybraną podstawę. γ to kąt między bokami a i b.

Przykład: $a = 8$ cm, $h_a = 5$ cm.

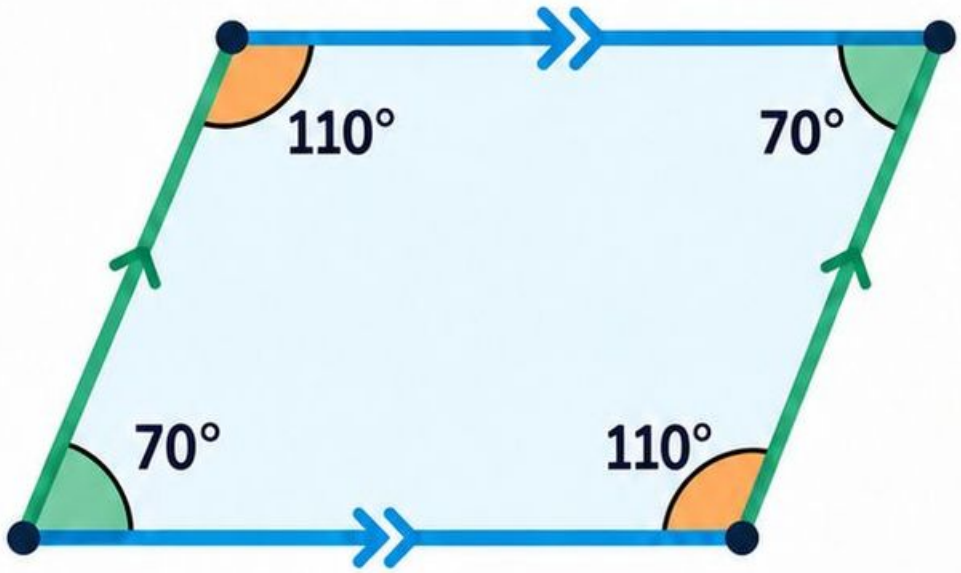
$$P = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2.$$

Podstawa i wysokość tworzą właściwą parę.

A39 • Czworokąty: własności

Poziom: 4–6

Suma kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360°. Równoległobok ma dwie pary boków równoległych.



Legenda:

- boki równoległe (parami)
- boki równoległe (parami)
- kąt 70°
- kąt 110°

Warunki:

Prostokąt ma cztery kąty proste; romb cztery równe boki; kwadrat spełnia oba warunki. Tu trapez ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Przykład:

W równoległoboku jeden kąt ma 70°. Sąsiedni ma 110°, a przeciwległy 70°.

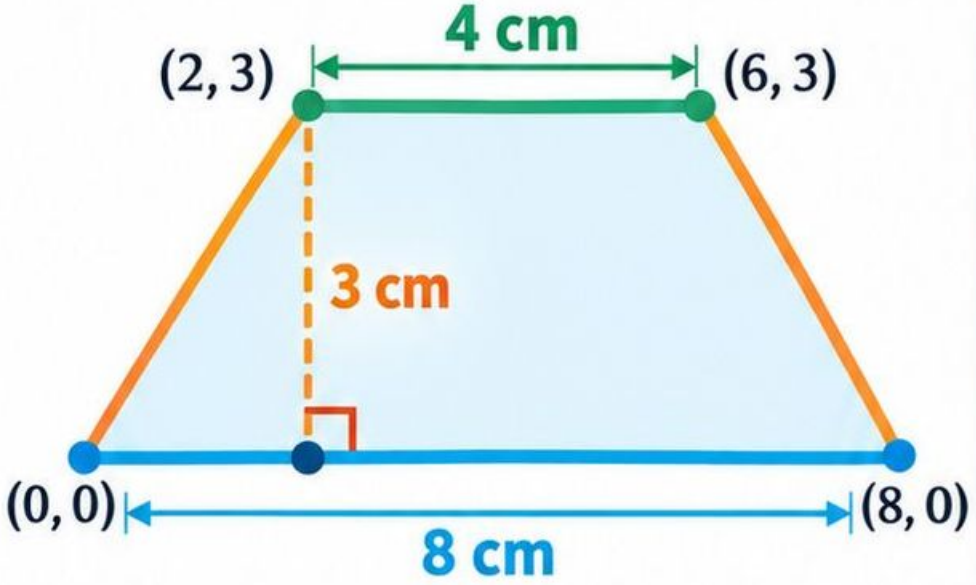
Rysunek:

Kąty równoległoboku kolejno: 70°, 110°, 70°, 110°.

A40 • Czworokąty: pola

Poziom: 4–6

Prostokąt:	Kwadrat:	Równoległobok:	Trapez:	Romb:
				
$P = ab.$	$P = a^2.$	$P = ah.$	$P = \frac{(a+b)h}{2}.$	$P = \frac{ef}{2}.$



- dolna podstawa 8 cm
- górna podstawa 4 cm
- ramiona
- wysokość 3 cm (prostopadła)
- kąt prosty (90°)

Rysunek: Równoległe podstawy mają 8 cm i 4 cm; prostopadła wysokość 3 cm.

Warunki: Długości dodatnie.
W trapezie a, b to równoległe podstawy.
h jest do nich prostopadła.
W rombie e, f oznaczają przekątne.

Przykład: **Trapez:** $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $h = 3$ cm.

$$P = \frac{(8+4)\cdot 3}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

A41 • Wielokąty foremne

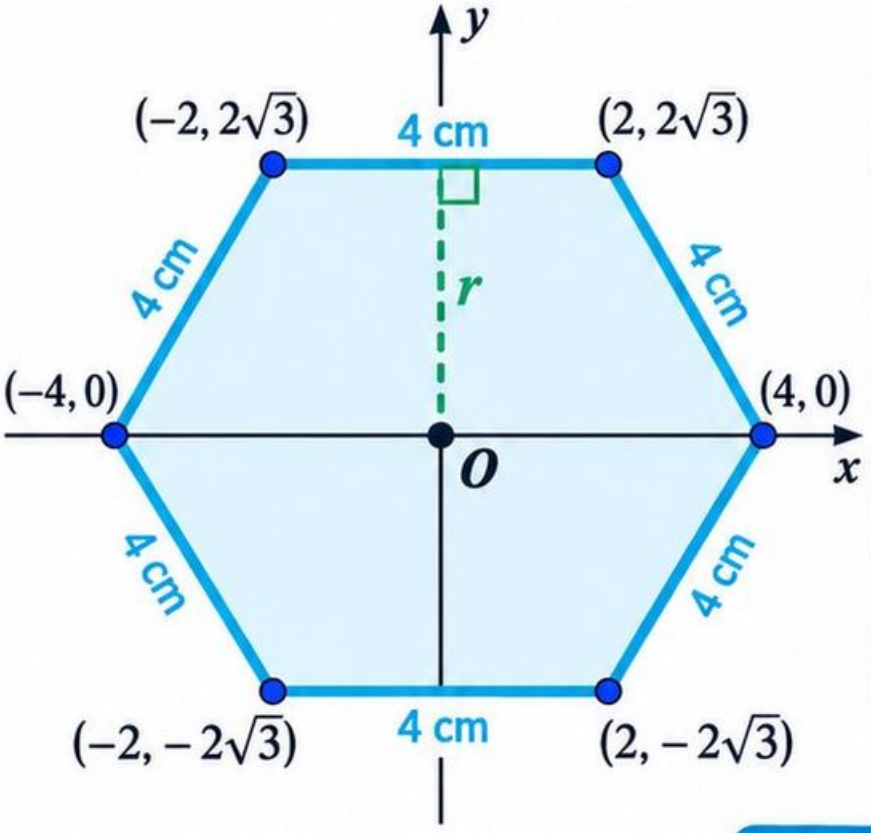
Poziom: L

Wzory

Suma kątów: $(n-2)\cdot 180°$.

Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego: $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

$O = na$. $\quad P = \dfrac{O \cdot r}{2}$.



Legenda

- ● – wierzchołek wielokąta
- ——— – bok długości 4 cm
- - - - – apotema r
- □ – kąt prosty (90°)
- O – środek wielokąta
- (x, y) – współrzędne wierzchołka

Warunki:

$n \geq 3$ jest całkowite; $a > 0$.
W ostatnim wzorze r jest apotemą, czyli promieniem okręgu wpisanego, a nie opisanego.

Przykład:

Sześciokąt foremny o boku 4 cm: $O = 24$ cm; każdy kąt wewnętrzny ma 120°.

Rysunek:

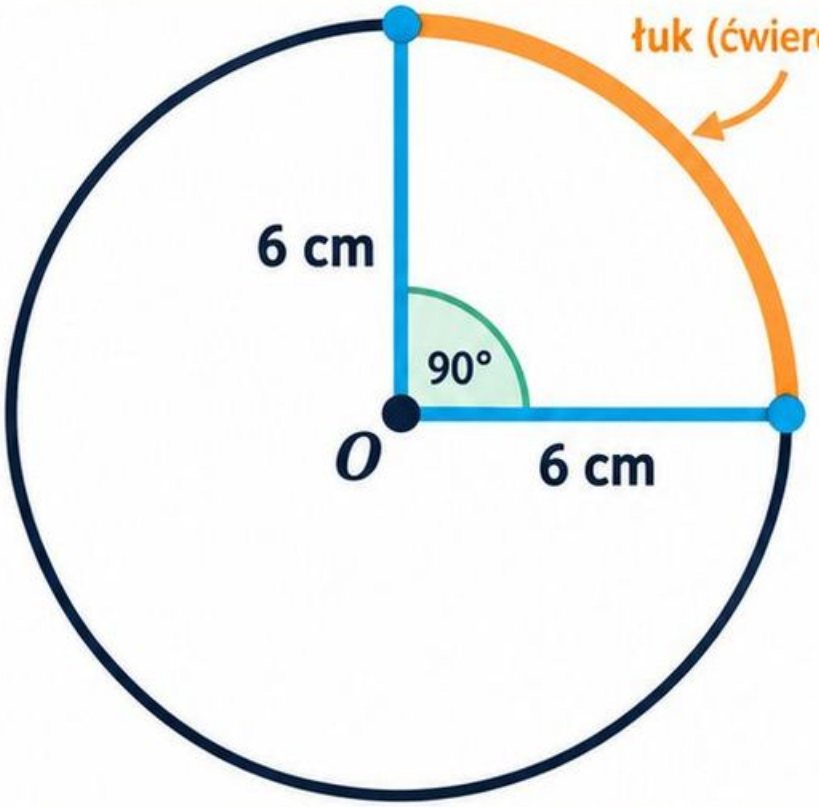
Sześć równych boków po 4 cm; apotema jest prostopadła do boku.

A42 • Okrąg i łuk

Poziom: 7–8

Obwód okręgu: $O = 2\pi r = \pi d$. **W liceum: długość łuku:**

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$



Legenda:

- O – środek okręgu
- promienie po 6 cm
- łuk (ćwierć okręgu)
- kąt środkowy 90°
- okrąg o promieniu 6 cm

Warunki:

$r > 0$, $d = 2r$; α jest kątem środkowym wyrażonym w stopniach, $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$. Łuk to część okręgu.

Przykład:

$r = 6$ cm, $\alpha = 90^\circ$.

$$l = \frac{90}{360} \cdot 12\pi = 3\pi \text{ cm} \approx 9{,}42 \text{ cm}.$$

Rysunek:

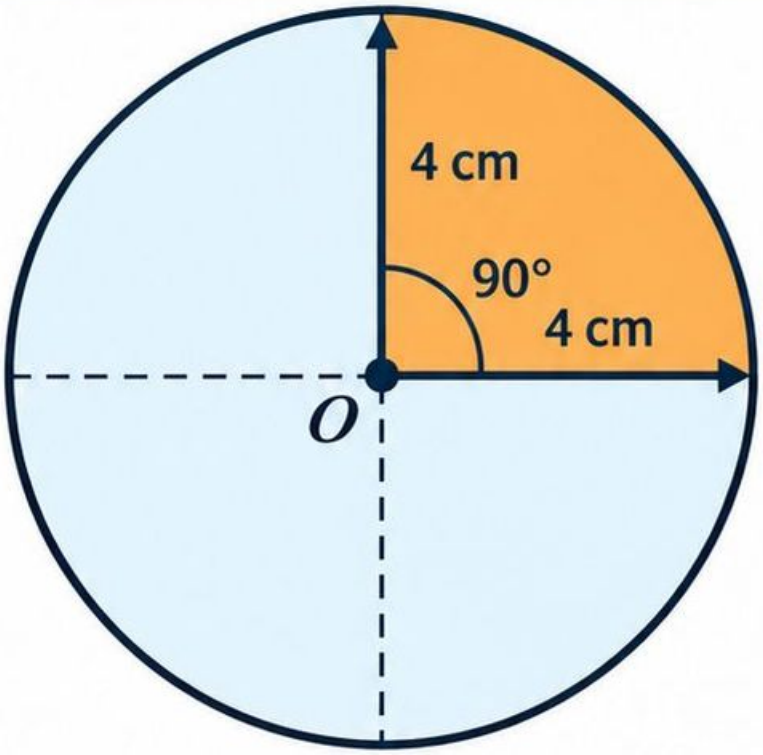
Dwa promienie po 6 cm wyznaczają kąt 90° i ćwierć okręgu.

A43 • Koło i wycinek

Poziom: 7–8

Pole koła: $P = \pi r^2$.

W liceum: pole wycinka: $P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$.



Legenda:

- wycinek koła ($\alpha = 90^\circ$)
- pozostała część koła
- O środek koła
- promień $r = 4$ cm
- średnice koła (prostopadle)
- kąt środkowy $\alpha = 90^\circ$

Warunki:

$r > 0$; $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ to kąt środkowy w stopniach.
Pole ma jednostkę kwadratową.
Koło obejmuje wnętrze; okrąg jest jego brzegiem.

Przykład:

$r = 4$ cm, $\alpha = 90^\circ$.

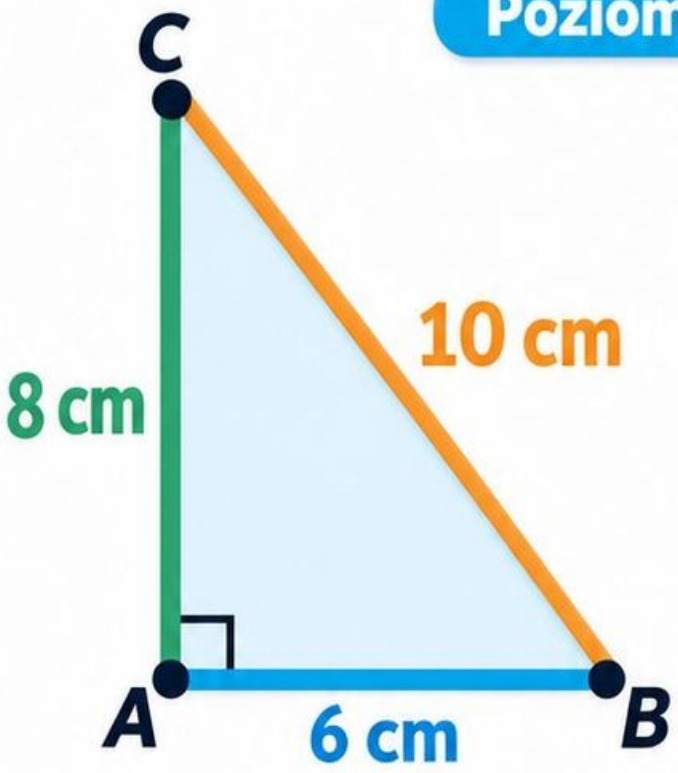
$$P = \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 16 = 4\pi \,\text{cm}^2 \approx 12{,}57 \,\text{cm}^2.$$

Rysunek:

Zamalowana ćwiartka koła ma promień 4 cm i kąt 90°.

A44 • Twierdzenie Pitagorasa

Poziom: 7–8



Oznaczenia:

- $a = 6$ cm (przyprostokątna)
- $b = 8$ cm (przyprostokątna)
- $c = 10$ cm (przeciwprostokątna)
- kąt prosty (90°)

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

gdzie c to przeciwprostokątna.

Warunki:

Trójkąt musi być prostokątny. Boki a i b tworzą kąt prosty; c leży naprzeciw niego i jest najdłuższy.

Przykład:

$a = 6$ cm, $b = 8$ cm.

$c = \sqrt{(36 + 64)} = \sqrt{100} = 10$ cm.

Kontrola: $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Rysunek:

Przyprostokątne: 6 i 8 cm; przeciwprostokątna: 10 cm.

A45 • Podobieństwo figur

Poziom: 7–8

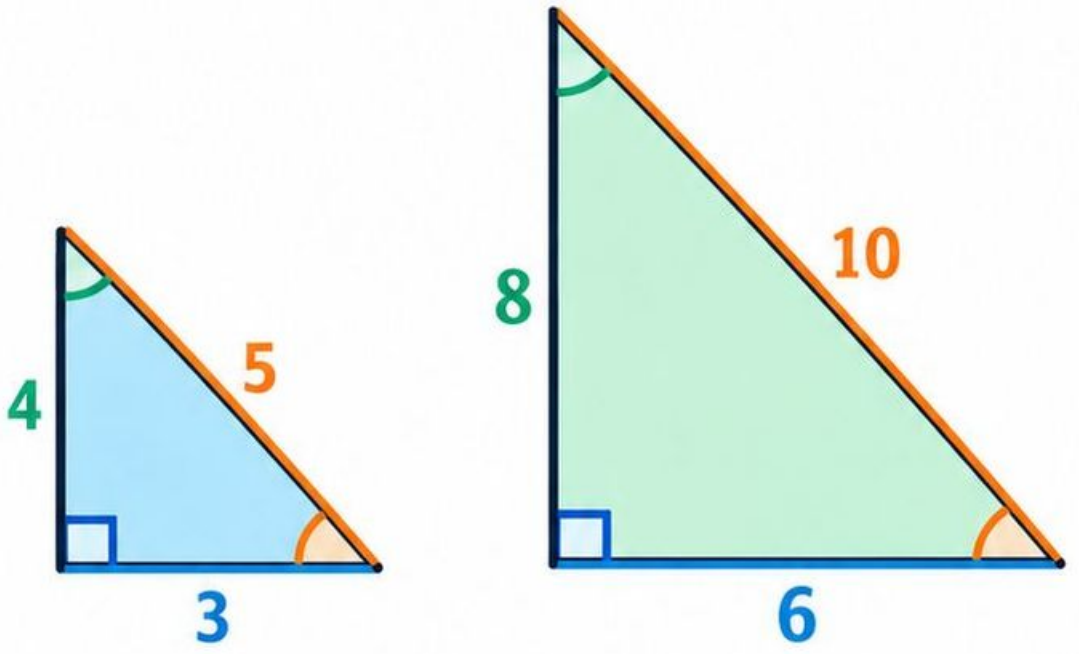
Dla odpowiadających boków figur podobnych:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k.$$

Pola spełniają

$$\frac{P_2}{P_1} = k^2.$$

Rysunek: Odpowiadające boki trójkątów: 3 ↔ 6, 4 ↔ 8, 5 ↔ 10.



Legenda:

- boki odpowiadające 3 ↔ 6
- boki odpowiadające 4 ↔ 8
- boki odpowiadające 5 ↔ 10
- kąty proste (równe)
- odpowiadające kąty ostre (równe)
- odpowiadające kąty ostre (równe)

Warunki:

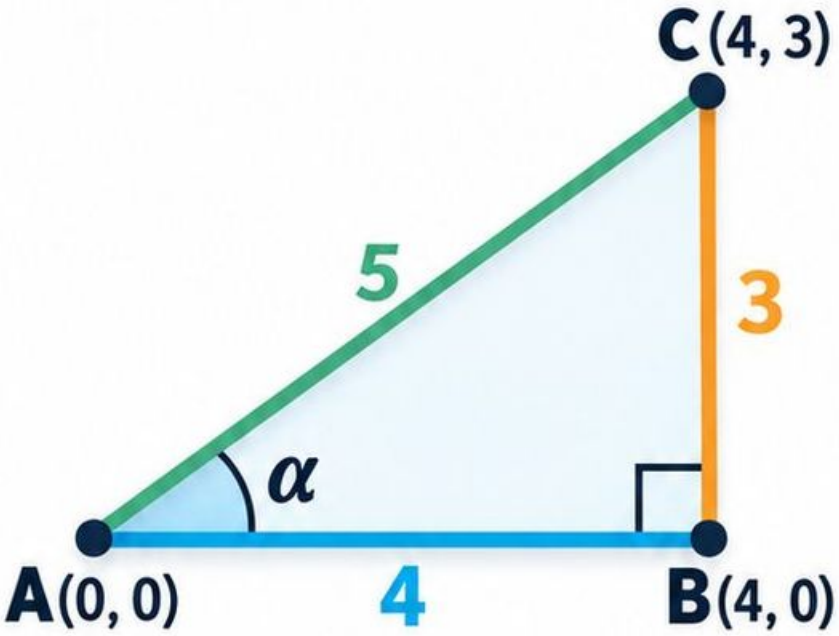
- $k > 0$.
- Odpowiadające kąty są równe.
- Sama równość jednego stosunku nie wystarcza do wykazania podobieństwa dowolnych figur.

Przykład: Trójkąty o bokach 3, 4, 5 i 6, 8, 10 są podobne w skali 2. Stosunek pól wynosi 4.

A46 • Trygonometria w trójkącie prostokątnym

Poziom: L

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$



Legenda:

- $a = 3$ (przyprostokątna naprzeciw α)
- $b = 4$ (przyprostokątna przy α)
- $c = 5$ (przeciwprostokątna)
- α (kąt przy boku 4)

Warunki:

$0° < \alpha < 90°$. c to przeciwprostokątna, a przyprostokątna naprzeciw α, b przyprostokątna przy α. Długości dodatnie.

Przykład:

Dla boków $\alpha = 3$, $b = 4$, $c = 5$:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}.$$

Rysunek:

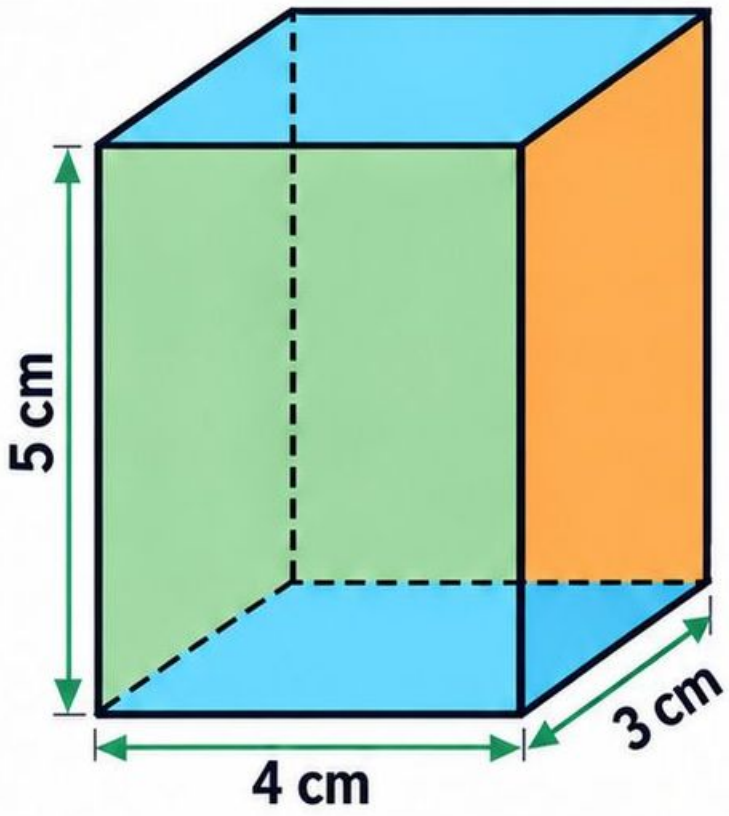
Kąt α leży przy boku 4, naprzeciw boku 3; przeciwprostokątna ma 5.

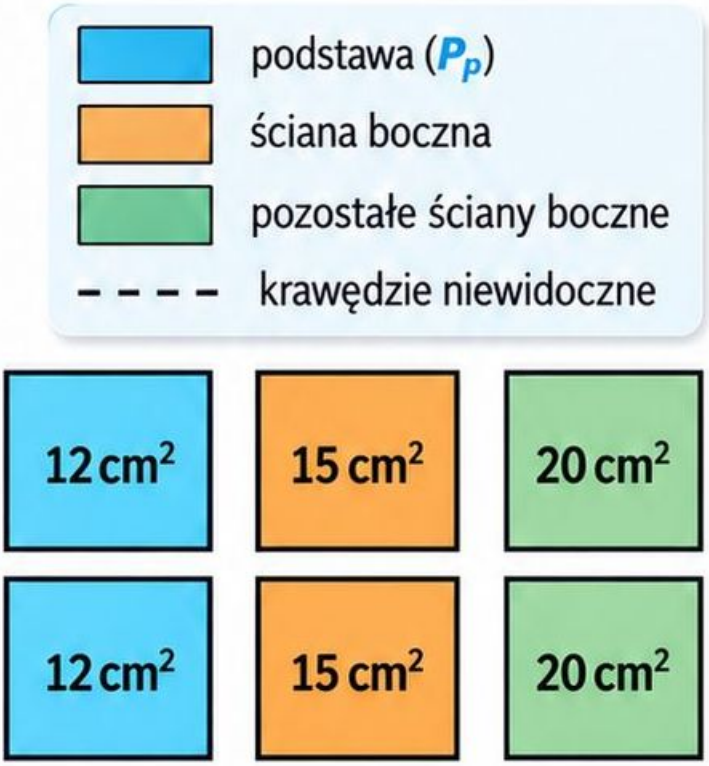
A47 • Graniastosłupy: pole i objętość

Poziom: 7–8

$$V = P_p H. \quad P_c = 2P_p + P_b.$$

Dla graniastosłupa prostego $P_b = O_p H$.





Warunki:

P_p to pole podstawy, O_p jej obwód; $H > 0$ to wysokość prostopadła między podstawami. Wzór $P_b = O_p H$ wymaga graniastosłupa prostego.

Przykład:

Prostopadłościan 3 × 4 × 5 cm:

$V = 60\ \text{cm}^3$; $P_c = 2(12 + 15 + 20) = 94\ \text{cm}^2$.

Rysunek:

Prostopadłościan ma krawędzie 3, 4 i 5 cm.

A48 • Ostrosłupy: pole i objętość

Poziom: 7–8

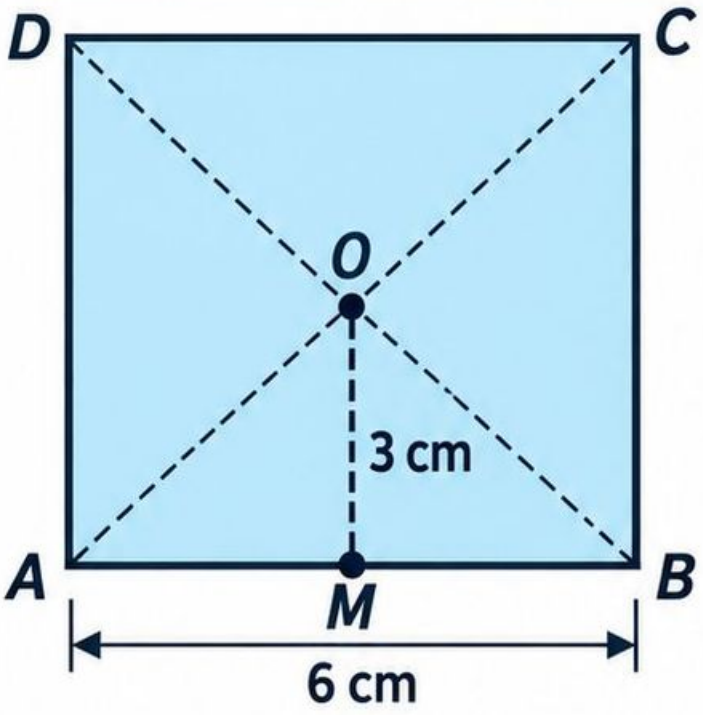
$$V = \frac{P_p \cdot H}{3}; \quad P_c = P_p + P_b.$$

W ostrosłupie prawidłowym $P_b = \frac{O_p \cdot l}{2}$.

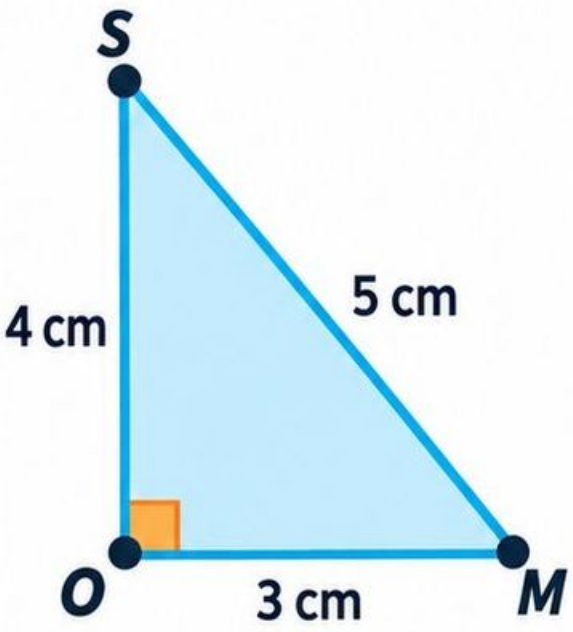
Warunki:

H to wysokość prostopadła do podstawy.
l jest wysokością trójkątnej ściany bocznej.
Nie utożsamiaj *H* z *l* ani z krawędzią boczną.

Rysunek: kwadratowa podstawa (widok z góry)



Rysunek: trójkąt SOM



Przykład:

Kwadratowa podstawa: $a = 6$ cm; $H = 4$ cm; $l = 5$ cm.

$$V = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48 \text{ cm}^3.$$

$$P_c = 36 + \frac{24 \cdot 5}{2} = 96 \text{ cm}^2.$$

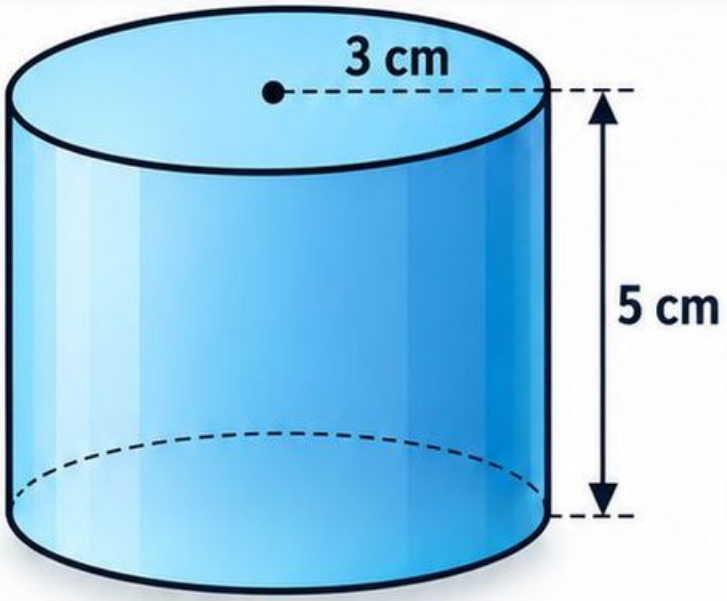
Rysunek: $H = 4$ cm biegnie do środka podstawy; $l = 5$ cm do środka jej boku.



A49 • Walec

Poziom: L

$$V = \pi r^2 H; \quad P_B = 2\pi r H; \quad P_C = 2\pi r^2 + 2\pi r H.$$



Oznaczenia:

- r – promień podstawy
- H – wysokość walca
- V – objętość walca
- P_B – pole powierzchni bocznej
- P_C – pole powierzchni całkowitej

Siatka walca:



Warunki:

Walec prosty: $r > 0$, $H > 0$. Siatka powierzchni bocznej jest prostokątem o bokach $2\pi r$ i H.

Przykład:

$r = 3$ cm, $H = 5$ cm. $V = 45\pi$ cm^3. $P_C = 18\pi + 30\pi = 48\pi$ cm^2.

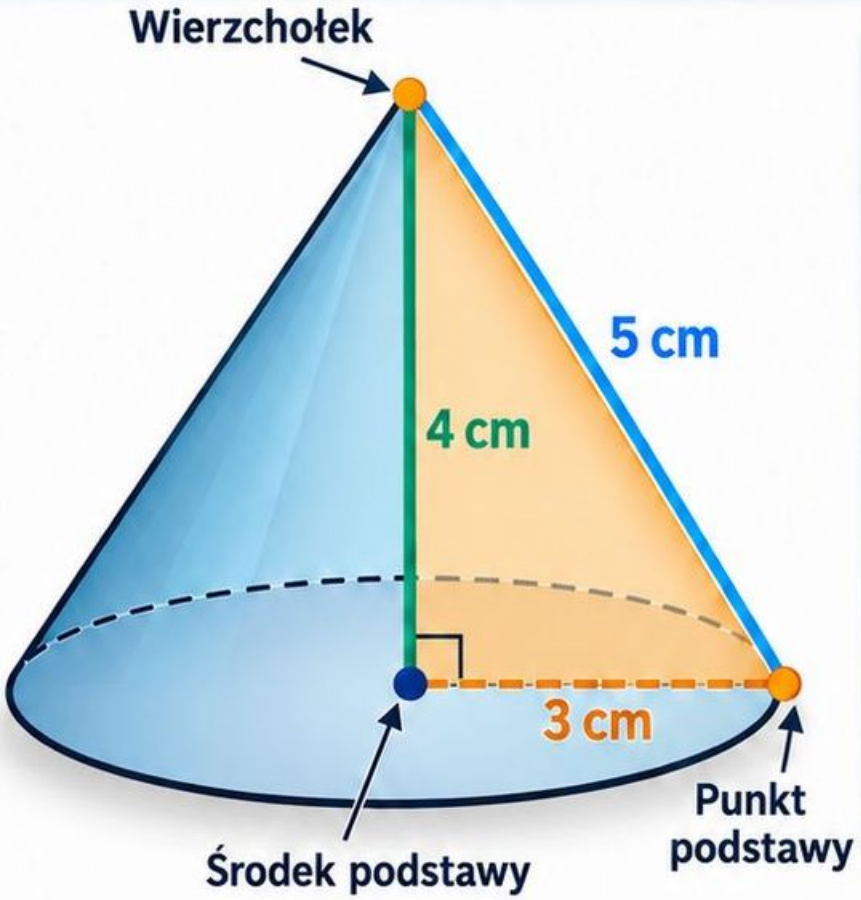
Rysunek:

Promień podstawy 3 cm; wysokość walca 5 cm; szerokość siatki bocznej 6π cm.

A50 • Stożek

Poziom: L

$$V = \pi r^2 H/3;\ P_B = \pi r l;\ P_C = \pi r^2 + \pi r l.$$
$$l^2 = r^2 + H^2.$$



- Wierzchołek
- Środek podstawy
- Punkt podstawy
- $r = 3$ cm (promień podstawy)
- $H = 4$ cm (wysokość)
- $l = 5$ cm (tworząca)
- Podstawa (stożek kołowy)
- **Połowa przekroju osiowego** (trójkąt prostokątny)

Warunki: Stożek prosty: $r, H > 0$; l to tworząca. Wysokość łączy wierzchołek ze środkiem podstawy i jest prostopadła do podstawy.

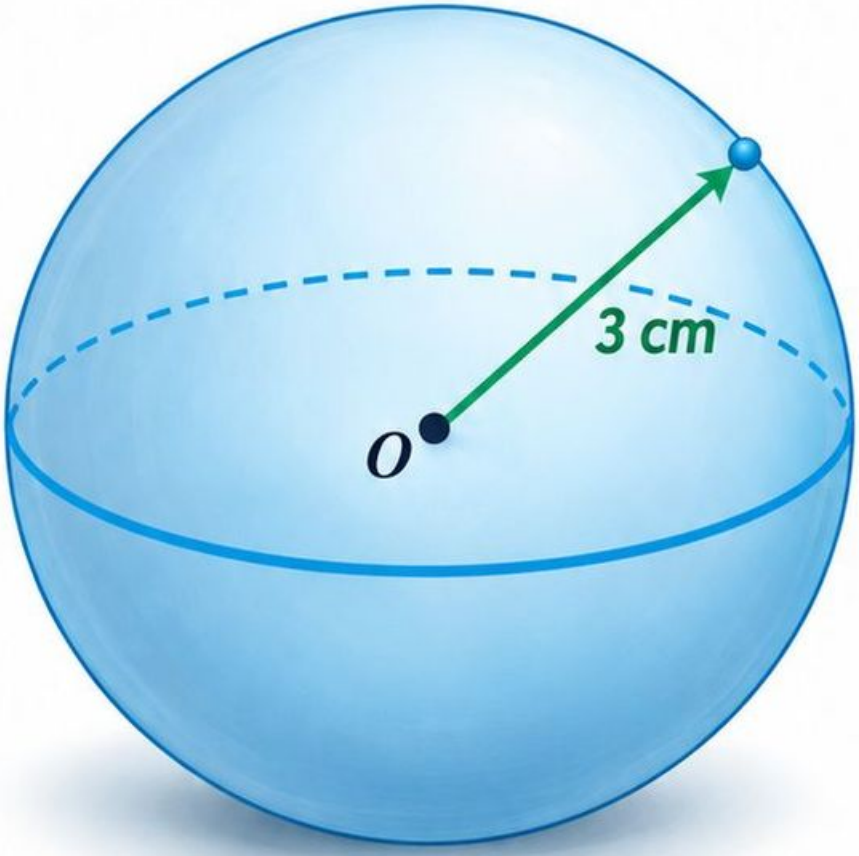
Przykład: $r = 3$ cm, $H = 4$ cm, $l = 5$ cm.
$V = 12\pi$ cm^3; $P_C = 9\pi + 15\pi = 24\pi$ cm^2.

Rysunek: Promień 3 cm, wysokość 4 cm i tworząca 5 cm tworzą trójkąt prostokątny.

A51 • Kula i sfera

Poziom: L

Objętość kuli: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. **Pole sfery:** $P = 4\pi r^2$.



Rysunek:

O jest środkiem; odcinek od O do powierzchni ma długość 3 cm.

- O – środek kuli
- promień $r = 3$ cm
- punkt na sferze
- równik (widoczny)
- równik (niewidoczny)

Warunki:

$r > 0$. Kula obejmuje wnętrze; sfera jest jej powierzchnią. Nie myl pola przekroju πr^2 z polem całej sfery.

Przykład:

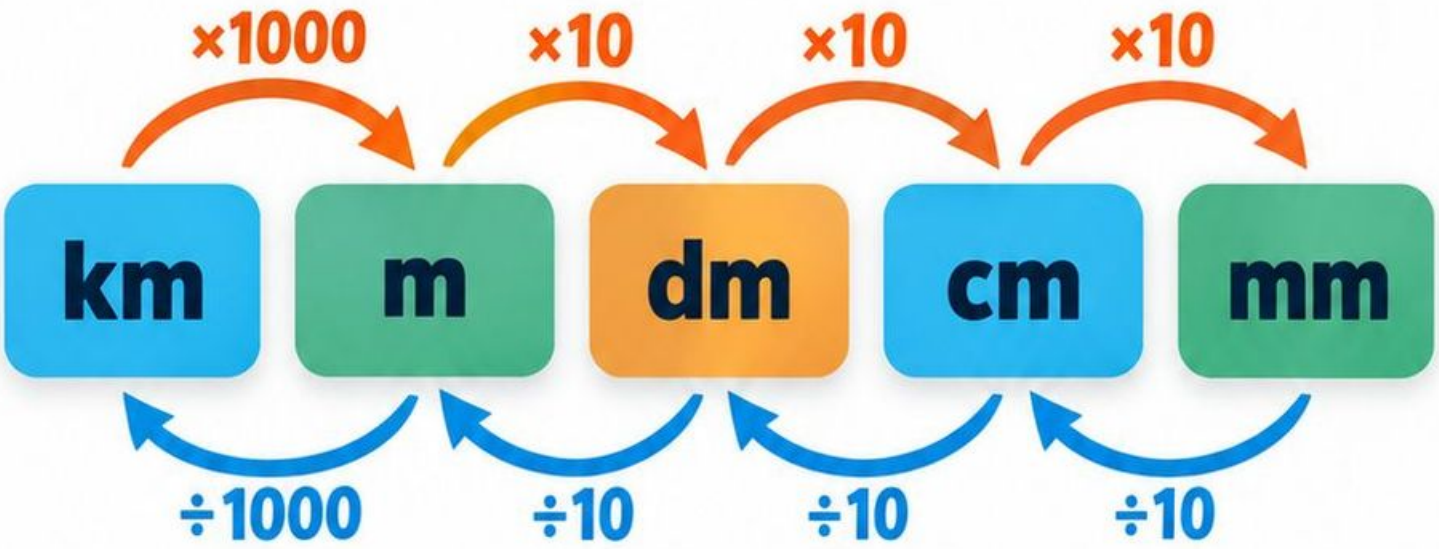
$r = 3$ cm. $V = \frac{4\pi \cdot 27}{3} = 36\pi$ cm^3; $P = 4\pi \cdot 9 = 36\pi$ cm^2.

Równe współczynniki nie oznaczają równości wielkości.

A52 • Jednostki długości

Poziom: 4–6

1 km = 1000 m; 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.



→ Na mniejszą jednostkę (mnożenie).

← Na większą jednostkę (dzielenie).

Rysunek: Od m do dm, cm i mm każdy kolejny krok oznacza mnożenie przez 10.

Warunki: Przy zmianie na mniejszą jednostkę liczba rośnie; na większą maleje. Zapisuj jednostkę przy każdym wyniku.

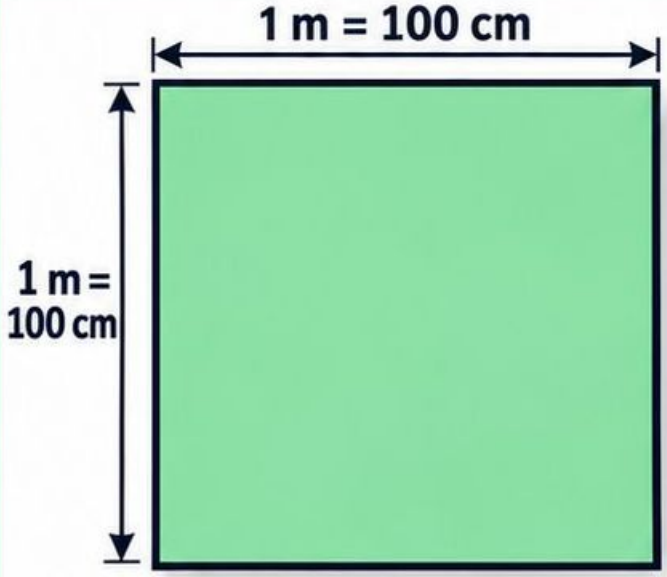
Przykład: 2,35 m = 235 cm = 2350 mm.
750 m = 0,75 km.
Kontrola: 0,75·1000 m = 750 m.

A53 • Jednostki pola i objętości

Poziom: 4–6

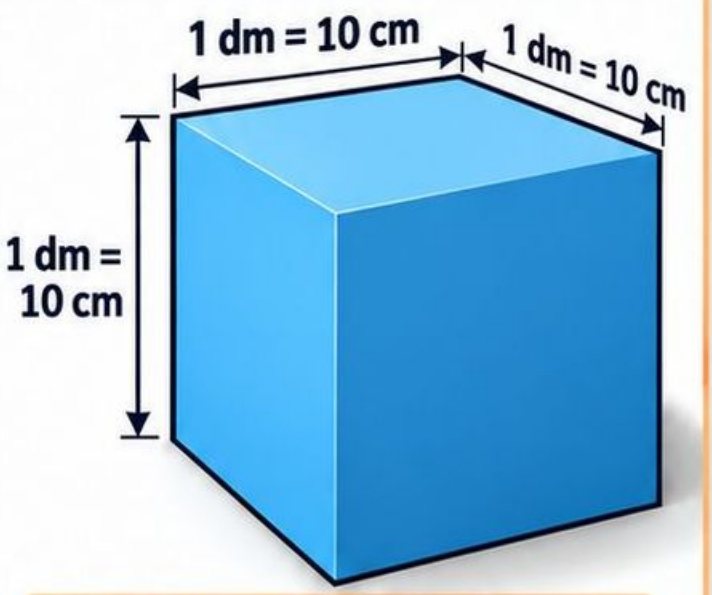
$$1\ m^2 = 10\,000\ cm^2;\ 1\ m^3 = 1\,000\,000\ cm^3.$$
$$1\ dm^3 = 1\ l;\ 1\ cm^3 = 1\ ml.$$

Kwadrat – jednostki pola



$1\ m^2 = 10\,000\ cm^2$

Sześcian – jednostki objętości



$1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3 = 1\ l$

$100 \times 100 = 10\,000$ $\qquad$ $10 \times 10 \times 10 = 1000$

Warunki:

Przelicznik długości podnieś do drugiej potęgi dla pola i trzeciej dla objętości. 1 l = 1000 ml.

Przykład:

$0{,}3\ m^2 = 3000\ cm^2$. $2{,}5\ l = 2500\ ml = 2500\ cm^3$.
Nie stosuj przelicznika 100 do $m^2 \rightarrow cm^2$.

Rysunek:

Kwadrat 1 m × 1 m ma 10 000 cm^2; sześcian 1 dm ma 1000 cm^3.

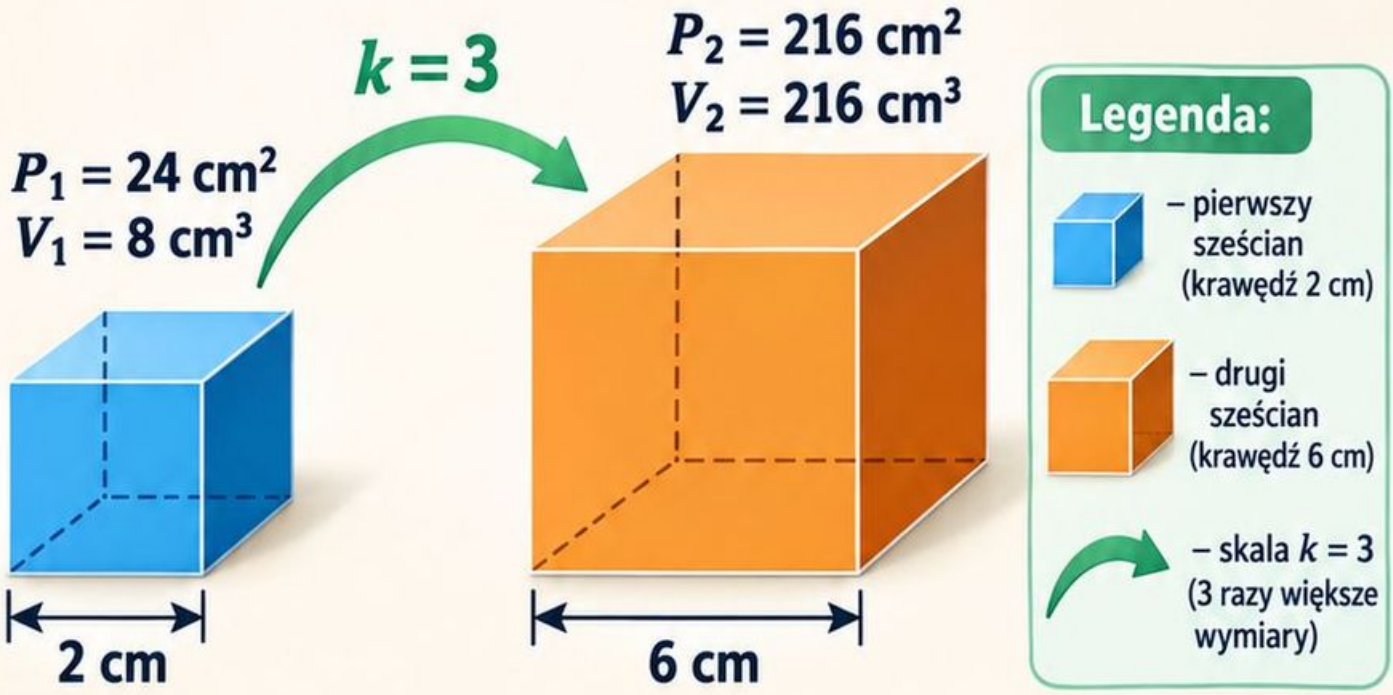
A54 • Skala pól i objętości

Poziom: 7–8

Dla figur podobnych: $P_2 = k^2 P_1$.

Dla brył podobnych: $V_2 = k^3 V_1$.

Rysunek: Sześciany o krawędziach 2 i 6 cm mają objętości 8 i 216 cm³.



Warunki:

$k > 0$ to stosunek odpowiadających długości drugiej figury lub bryły do pierwszej. Formuły wymagają podobieństwa, a nie tylko zmiany jednego wymiaru.

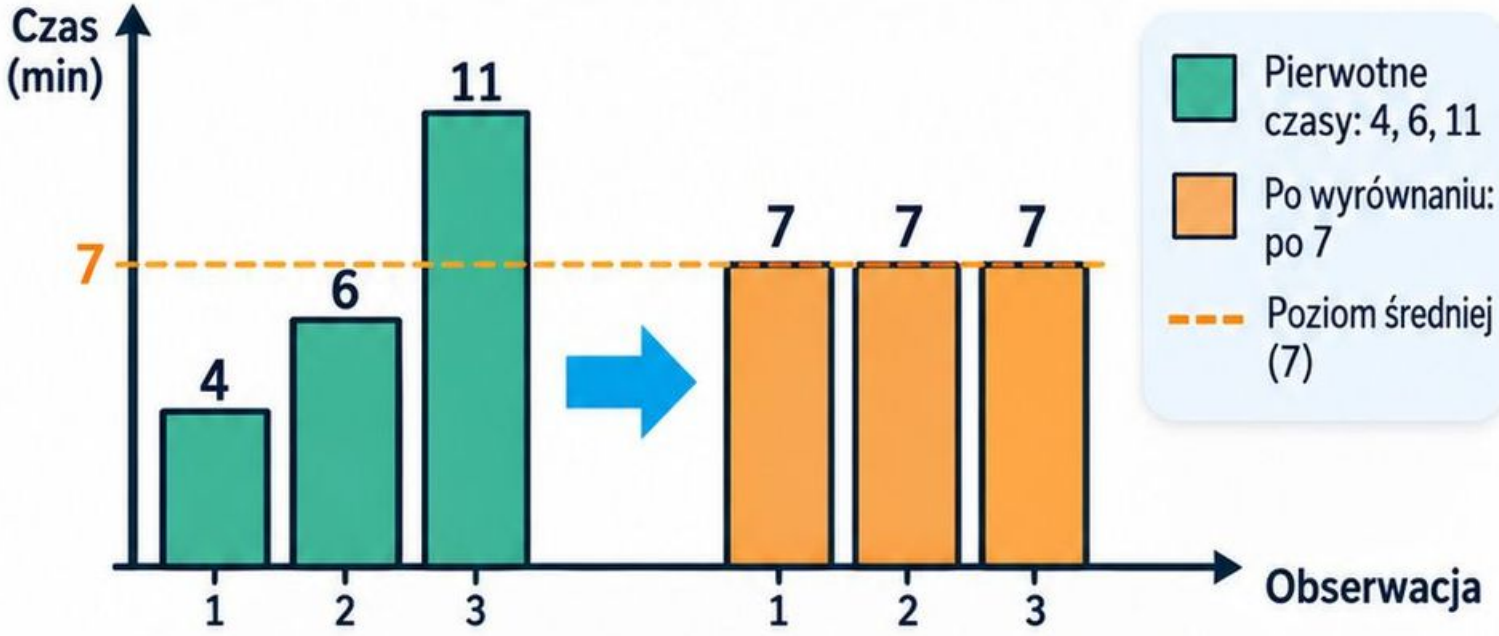
Przykład:

Bok sześcianu rośnie z 2 do 6 cm: $k = 3$.
Pole rośnie 9 razy, objętość 27 razy: $8 \cdot 27 = 216$ cm³.

A55 • Średnia arytmetyczna

Poziom: 4–6

$$\text{Średnia} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$



Rysunek: Słupki 4, 6 i 11 po wyrównaniu mają wysokość 7; suma pozostaje 21.

Warunki: $n \geq 1$. Dane muszą opisywać porównywalne wielkości w zgodnych jednostkach. Średnia może nie być żadną z obserwowanych wartości.

Przykład: Czasy 4, 6 i 11 min: średnia $= \frac{21}{3} = 7$ min. Wynik leży między 4 a 11 min.

A56 • Średnia ważona

Poziom: L

$$\text{Średnia ważona} = \frac{w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + \ldots + w_n}.$$



Legenda:

- 3 – wartość 3
- 5 – wartość 5
- – waga (liczba wystąpień)

Rysunek:

Trzy jednakowe pola zawierają 3, 3 i 5; wartość 3 występuje dwa razy.

Przykład:

Wartość 3 z wagą 2 i wartość 5 z wagą 1:

$$\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{2 + 1} = \frac{11}{3} \approx 3{,}67.$$

Warunki:

Wagi są nieujemne i ich suma dodatnia. Częstości mogą pełnić rolę wag. Zasady wag ocen ustala szkoła; przykład nie jest regulaminem.

A57 • Mediana i dominanta

Poziom: 7–8

Mediana
(parzysta liczba danych): $$Me = \frac{a_{n/2} + a_{n/2+1}}{2}$$

Rysunek: Uporządkowane dane: 2, 3, 3, 8, 9, 11; środkowa para to 3 i 8.



Najpierw uporządkuj dane rosnąco. Nieparzysta liczba danych: mediana to środkowa wartość. Parzysta: średnia dwóch środkowych.

Warunki: Dominanta jest wartością występującą najczęściej; może być więcej niż jedna. W tym atlasie przy jednakowych częstościach wszystkich wartości nie wskazujemy dominanty.

Przykład: Dane: 2, 3, 3, 8, 9, 11.
Mediana = (3 + 8)/2 = 5,5. Dominanta = 3.

A58 • Prawdopodobieństwo klasyczne

Poziom: 7–8

Wzór

$$P(A) = \frac{\text{liczba wyników sprzyjających } A}{\text{liczba wszystkich wyników.}}$$

Rysunek

Rysunek: Sześć równych kart wyników; zaznaczone tylko 5 i 6.



Warunki

- Warunki: Przestrzeń wyników musi być skończona i niepusta, a wyniki jednakowo prawdopodobne.
- Zawsze $0 \leq P(A) \leq 1$.

Przykład

Przykład: Uczciwa kostka: A oznacza wynik większy niż 4.

Sprzyjają 5 i 6, więc $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

A59 • Dodawanie i mnożenie w zliczaniu

Poziom: 7–8

Rozłączne możliwości: dodaj liczby wyborów.
Kolejne etapy z odpowiednio m i n opcjami: $m \cdot n$ wyników.

Koszulki i spodnie: $3 \cdot 2 = 6$ zestawów



Napoje: $3 + 2 = 5$ opcji



Legenda



Warunki:

Dodawanie bez korekty wymaga rozłącznych przypadków.
Mnożenie $m \cdot n$ wymaga n dostępnych opcji po każdym z m pierwszych wyborów.

Przykład:

3 koszulki i 2 pary spodni dają $3 \cdot 2 = 6$ zestawów.
Wybór jednego napoju: 3 soki lub 2 herbaty daje 5 opcji.

Rysunek:

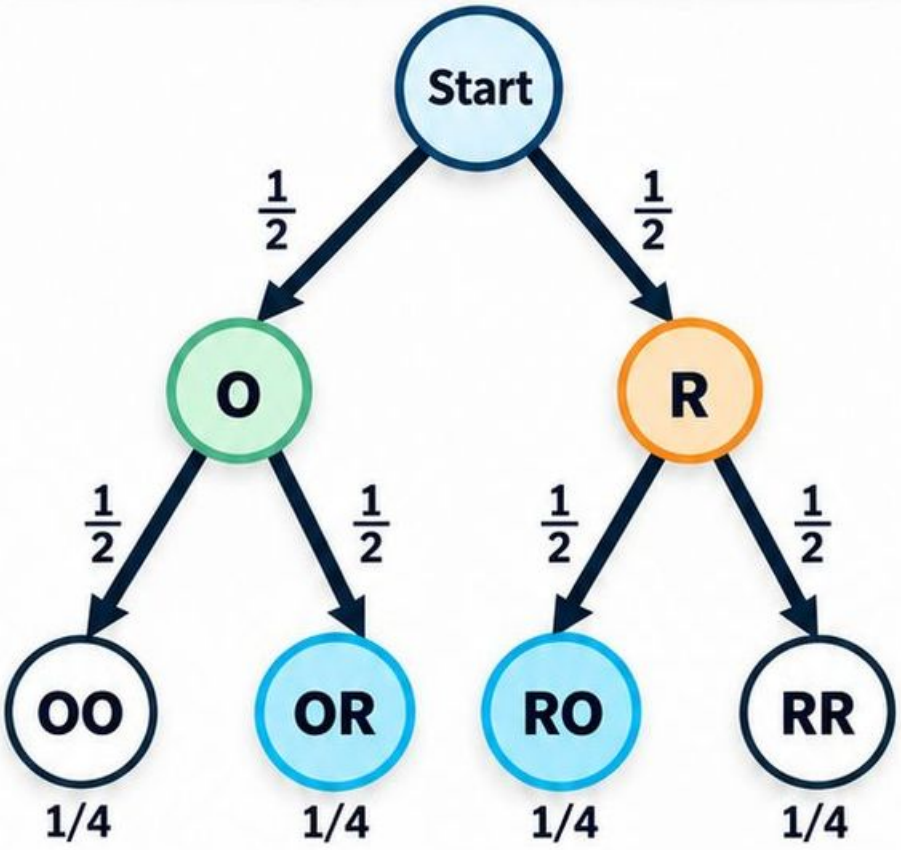
Tabela ma trzy wiersze koszulek i dwie kolumny spodni: sześć komórek.

A60 • Drzewo możliwości

Poziom: 7–8

Każda ścieżka od początku do liścia opisuje jeden wynik.

Zlicz liście albo sumuj liczebności rozłącznych gałęzi.



Rysunek:

O: orzeł; **R**: reszka.
Zaznaczone liście **OR** i **RO** to dokładnie jeden orzeł.

- – początek
- – orzeł (O)
- – reszka (R)
- – zaznaczone liście **OR** i **RO**
- – pozostałe liście (**OO** i **RR**)

Warunki:

W drzewie prawdopodobieństwa mnożymy prawdopodobieństwa wzdłuż ścieżki; dodajemy je dla rozłącznych ścieżek. Prawdopodobieństwa gałęzi wychodzących z jednego węzła sumują się do 1.

Przykład:

Dwa niezależne rzuty uczciwą monetą: OO, OR, RO, RR.
Każda ścieżka ma prawdopodobieństwo $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Dokładnie jeden orzeł: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

A61 • Logarytmy

Poziom: L

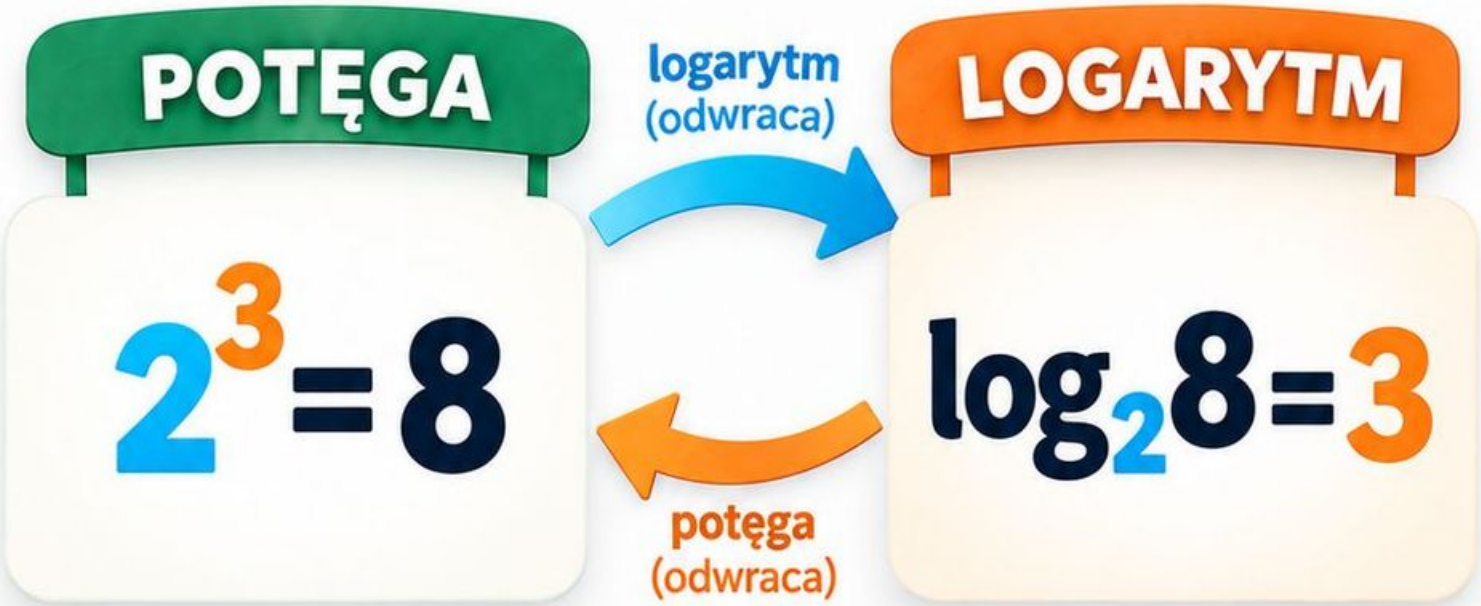
$$\log_a b = c \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^c = b.$$

Warunki: $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Dla x, $y > 0$:

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$.

Dla $x > 0$: $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$.

Przykład: $\log_2 8 = 3$, bo $2^3 = 8$. $\log_2(8 \cdot 4) = 3 + 2 = 5$.



Rysunek: Potęga i logarytm opisują tę samą relację między 2, 3 i 8.

A62 • Tożsamości i kąty szczególne

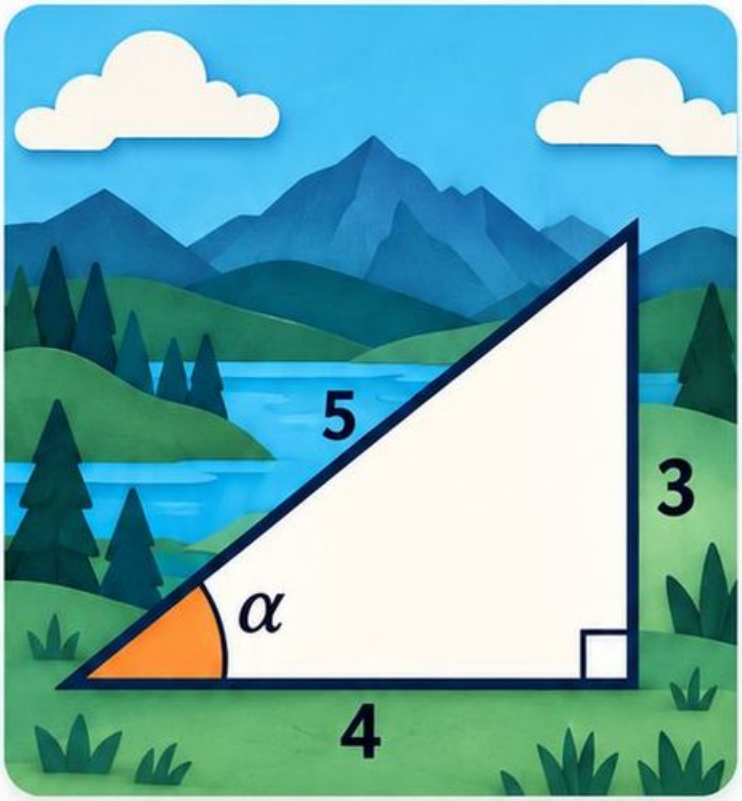
Poziom: L

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ gdy } \cos\alpha \neq 0.$$

Dla kąta ostrego: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

Kąt	sin	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$



Przykład: α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$. Wybieramy wartość dodatnią.

Rysunek: Trójkąt 3–4–5; α naprzeciw boku 3.

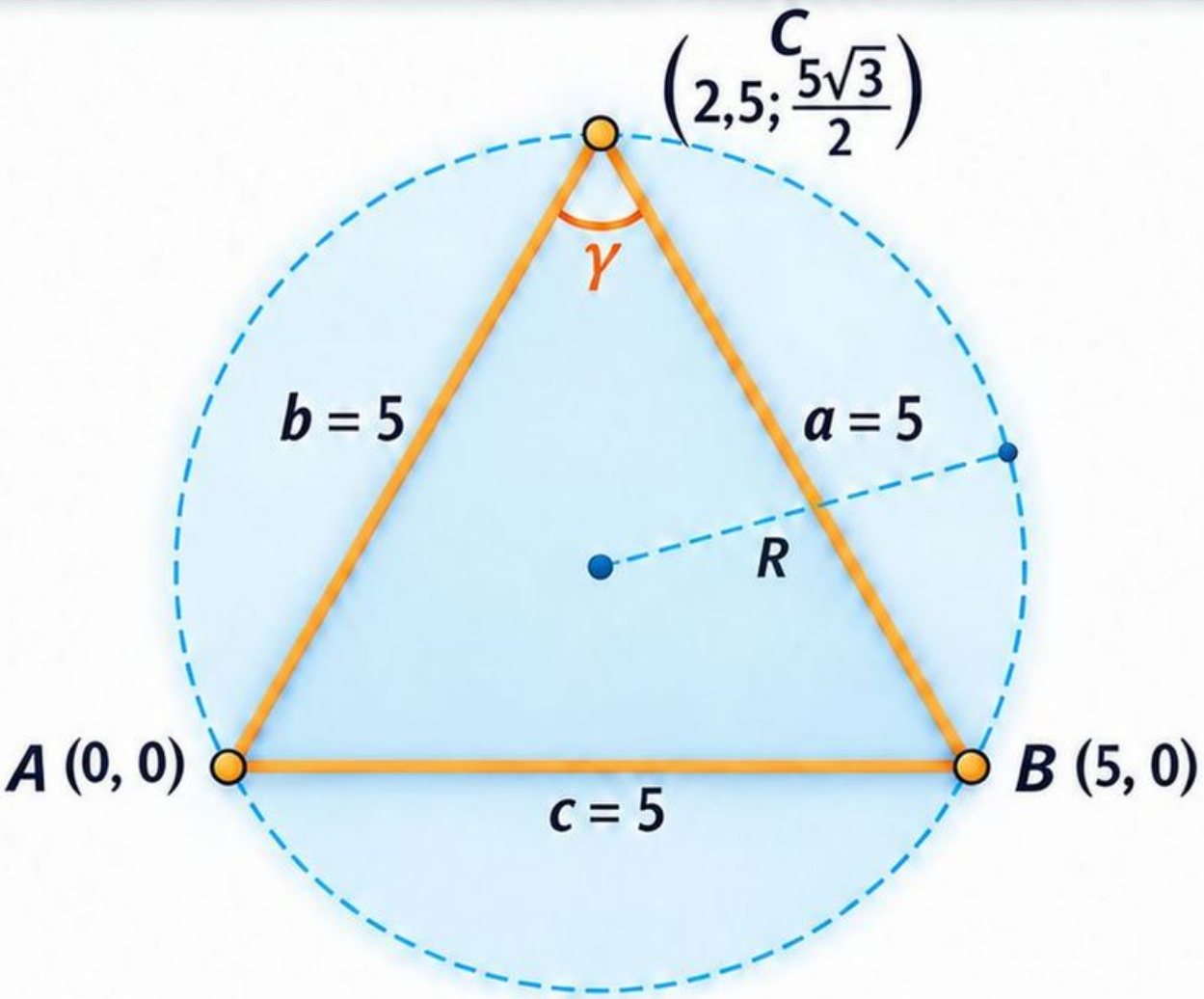
A63 • Twierdzenia sinusów i cosinusów

Poziom: L

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$$

Warunki: Dowolny nieosobliwy trójkąt; $a, b, c > 0$. Kąty α, β, γ leżą naprzeciw odpowiednich boków. R to promień okręgu opisanego. Kąt γ leży między bokami a i b.



Przykład: $a = b = 5$ cm, $\gamma = 60°$. $c^2 = 25 + 25 - 50\cdot\frac{1}{2} = 25$, więc $c = 5$ cm.

Rysunek: Boki a i b spotykają się przy kącie γ; bok c leży naprzeciw γ.

A64 • Procent składany

Poziom: L

Wzór

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Warunki

$K_0 \geq 0$, $p \geq 0$, n to nieujemna liczba całkowita. Stała stopa p dotyczy jednego okresu, a przyrost po każdym okresie dopisujemy do kapitału. Model pomija podatki, opłaty i zmiany stopy.

Przykład modelowy

1000 zł, wzrost o 10% w każdym z dwóch okresów.
$K_2 = 1000 \cdot 1{,}1^2 = 1210$ zł. Przyrost: 210 zł.

Rysunek

1000 → 1100 → 1210 zł; oba kroki oznaczają mnożenie przez 1,1.



A65 • Wariancja i odchylenie standardowe

Poziom: L

$$\sigma^2 = [(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2]/n;\ \sigma = \sqrt{(\sigma^2)}.$$

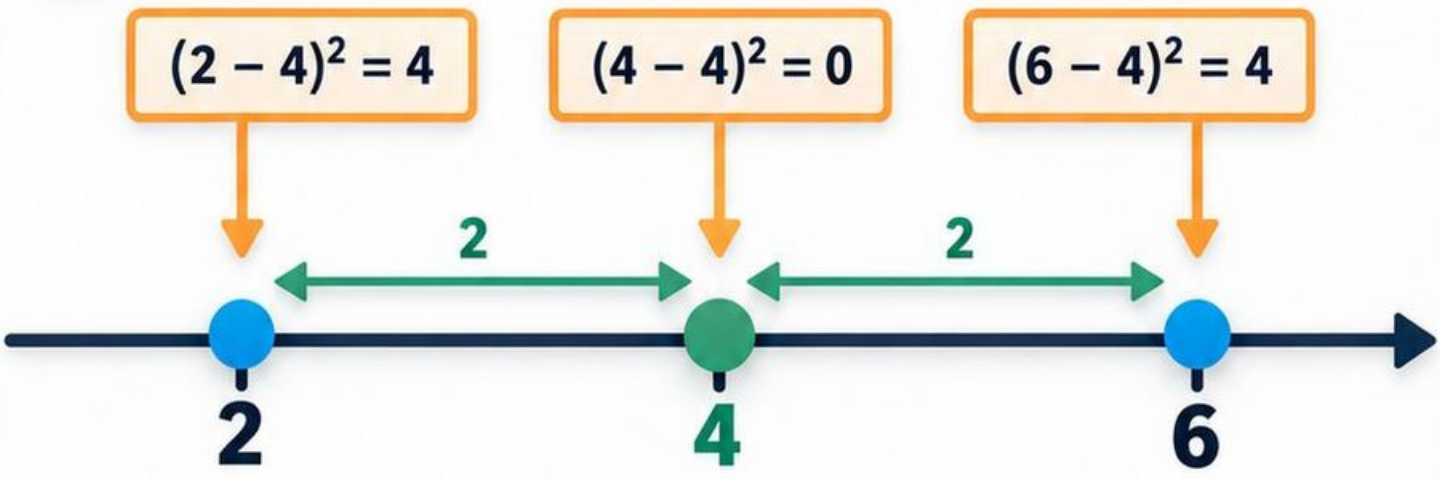
$\bar{x}$ oznacza średnią arytmetyczną.

Wariancja zestawu n danych: średnia kwadratów odchyleń od średniej. Odchylenie standardowe to pierwiastek z wariancji.

Warunki: $n \geq 1$. W szkolnym opisie danego zestawu dzielimy przez n. Wariancja ma jednostkę podniesioną do kwadratu; odchylenie — jednostkę danych.

Przykład: dane 2, 4, 6; średnia 4. Wariancja = (4 + 0 + 4)/3 = 8/3. Odchylenie = $\sqrt{(8/3)} \approx 1{,}63$.

Rysunek: Na osi 2, 4, 6; odległości od średniej to 2, 0, 2.



Indeks symboli

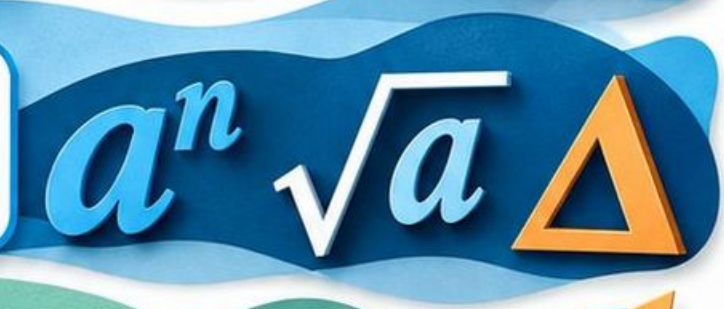
1

$=$ równość; $\approx$ przybliżenie; $\neq$ różne: s. 5, 11.
$\mathbb{R}$: liczby rzeczywiste; $\mathbb{Z}$: liczby całkowite.



2

a^n: potęga, s. **12**; $\sqrt{a}$: pierwiastek, s. 14;
Δ: wyróżnik, s. 30–31.



3

%: procent, s. 16–19; k: współczynnik proporcjonalności lub skala, s. 20–21, 49, 58.



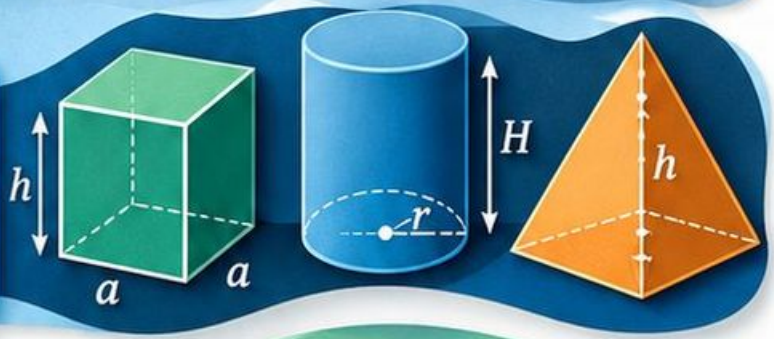
4

x, y: współrzędne, s. 34–39; a_n: n-ty wyraz ciągu; S_n: suma, s. 32–33.



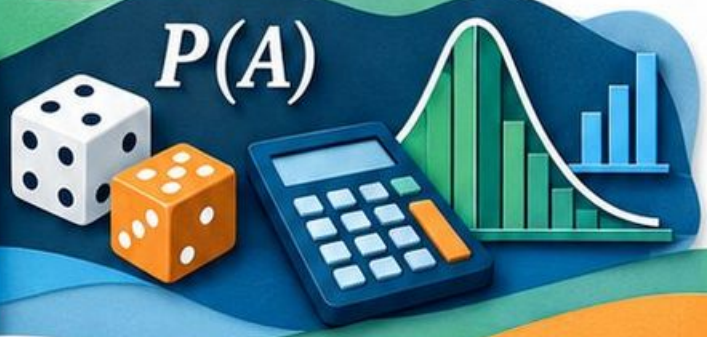
5

P: pole; O: obwód; V: objętość; r: promień;
h, H: wysokość, s. 42–58.
P_p: pole podstawy; O_p: obwód podstawy;
P_b: pole boczne; P_c: pole całkowite, s. 51–54.



6

$P(A)$: prawdopodobieństwo zdarzenia, s. 62–64.
Ten sam znak może mieć inne znaczenie w innym kontekście.
$\log_a b$: logarytm, s. 65; **sin, cos, tg**: s. 50, 66–67;
K_n: kapitał po n okresach, s. 68; wariancja i odchylenie: s. 69.



Indeks tematów i etapów



4–6

4–6: ułamki i działania **7–11**; procent liczby **16**; skala **21**; droga i czas **22**; kąty i pola **40–44**; jednostki **56–57**; średnia **59**.

7–8

7–8: znaki **6**; potęgi i pierwiastki **12–14**; procenty **17–19**; proporcje **20**; algebra **23**, **25–26**, **29**; wykresy **39**; koło i podobieństwo **46–49**; graniastosłupy i ostrosłupy **51–52**; statystyka i losowanie **61–64**.

L

L: przedziały **15**; wzory skróconego mnożenia **24**; nierówności i układy **27–28**; równania kwadratowe i ciągi **30–33**; funkcje **34–38**; wielokąty foremne **45**; trygonometria **50**; bryły obrotowe **53–55**; średnia ważona **60**. Uzupełnienia: logarytmy **65**; tożsamości i kąty **66**; twierdzenia sinusów i cosinusów **67**; procent składany **68**; wariancja i odchylenie **69**.

Etapy oznaczają zalecaną trudność. Plansze zawierające rozszerzenie wyraźnie je nazywają; dobór dopasuj do klasy i realizowanego programu.

Źródła: szkoła podstawowa

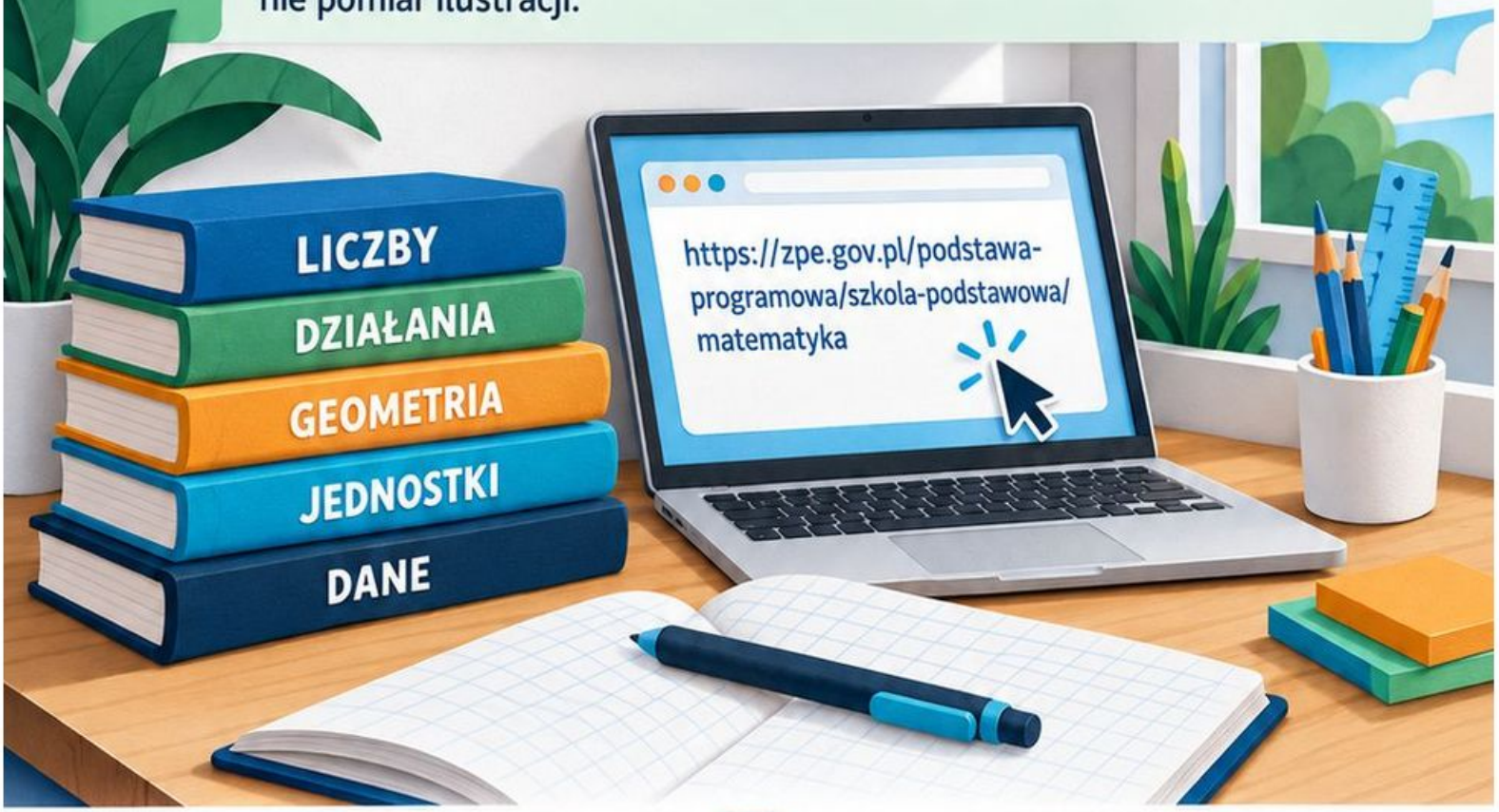
Zintegrowana Platforma Edukacyjna — Matematyka, szkoła podstawowa IV–VIII. Materiał referencyjny do zakresu pojęć: liczby, działania, geometria, jednostki, dane i proste doświadczenia losowe.

https://zpe.gov.pl/podstawa-programowa/szkola-podstawowa/matematyka

Dostęp: 02.11.2026. Strona opisuje rok szkolny 2025/2026. Nie stanowi samodzielnego potwierdzenia zgodności atlasu ze wszystkimi zmianami programu od 2026 roku.

Definicje, przykłady liczbowe, podpisy oraz układ plansz opracowano samodzielnie. Przykłady służą objaśnieniu wzorów; pojedynczy przykład nie zastępuje dowodu.

Przed zastosowaniem sprawdź poziom planszy, warunki wzoru i jednostki. W zadaniach geometrycznych obowiązują podpisy długości i kątów, nie pomiar ilustracji.



Źródła: liceum i egzamin



ZPE — **Matematyka, szkoła ponadpodstawowa:** zakres podstawowy i rozszerzony rozróżniono w źródle. Atlas wybiera zagadnienia podstawowe; nie jest kompletnym wykazem wymagań egzaminacyjnych.

https://zpe.gov.pl/podstawa-programowa/szkola-ponadpodstawowa/matematyka

CKE — **Informator o egzaminie maturalnym z matematyki, poziom podstawowy.** Źródło odniesienia dla terminologii i typu zadań, nie zbiór skopiowanych ćwiczeń.

https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Informatory/2024/Informator_EM2024_matematyka_pp.pdf

Dostęp: 02.11.2026. Przed egzaminem korzystaj z komunikatów i tablic wzorów CKE obowiązujących w danym roku. Atlas nie zastępuje oficjalnych tablic ani komunikatów.

Wersja redakcyjna atlasu: 1.0 • 02.11.2026. Wszystkie rozwiązane przykłady są autorskie.