100 aktywności matematycznych z prostych materiałów

Badanie, ruch i samodzielne wyjaśnienia



100 aktywności oraz dodatkowe badanie A101

Klasy 4–8 • liceum i technikum

Indeks według tematu

Liczby i działania: A001, A007, A013 i dalej co sześć numerów do A097.

Procenty i proporcje: A002, A008 i dalej co sześć numerów do A098.

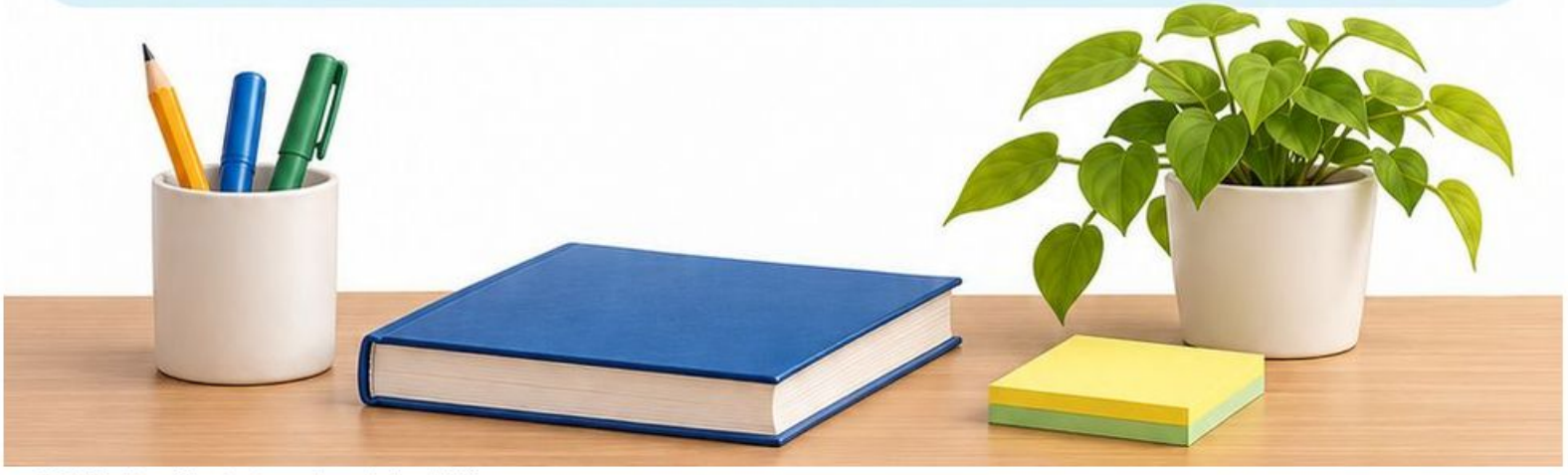
Algebra: A003, A009 i dalej co sześć numerów do A099.

Geometria: A004, A010 i dalej co sześć numerów do A100.

Funkcje i zależności: A005, A011 i dalej co sześć numerów do A101.

Dane i losowość: A006, A012 i dalej co sześć numerów do A096.

Każda aktywność zajmuje dwie strony: instrukcję oraz omówienie. A001 zaczyna się na stronie 5.



Materiały i przygotowanie



Przygotuj papier w kratkę, tekturę z opakowań, nakrętki, nitkę, taśmę, linijkę, nożyczki szkolne i ołówek.

Wybierz aktywność odpowiednią do programu klasy. Licealne pojęcia funkcji, ciągów i trygonometrii oznaczono osobno.

Przed zajęciami wykonaj model próbny. Modele o zadanych długościach rysuj samodzielnie linijką. Ilustracje są poglądowe; nie przyjmuj, że centymetr na ilustracji to centymetr na wydruku.

Zamiast rzeczywistych wydatków, danych osób czy pomiarów zdrowotnych używaj podanych modeli.

Przy cięciu organizuj pracę stosownie do wieku; młodszym uczniom przygotuj gotowe elementy.

Prowadzenie i ocena badania



Najpierw przewidywanie, potem wykonanie modelu, zapis i wyjaśnienie.

Zbieraj dowody: czy uczeń zachował warunki, poprawnie obliczył i uzasadnił wniosek?

Prosta rubryka:

0 — brak próby;
1 — poprawny model z pomocą;
2 — samodzielne obliczenie;
3 — obliczenie i wyjaśnienie ograniczeń modelu.

Nie oceniaj estetyki zamiast matematyki. Wynik pomiaru może różnić się od wzorcowego z powodu dokładności przyrządu.

Strony omówień zawierają rozwiązania liczbowe albo kryteria oceny badania otwartego.

A001 • Wymiana w banku dziesiątkowym

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 40 patyczków, gumki i trzy kartonowe kolumny.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1. Związ po 10 patyczków.
2. Przedstaw 27, następnie dołóż 8.
3. Wymień pełne dziesiątki i odczytaj wynik.
4. Narysuj stan przed wymianą i po niej.

Przed wymianą	Po wymianie

A001 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

27+8=35; 3 dziesiątki i 5 jedności.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego wymiana dziesięciu jedności na dziesiątkę nie zmienia wartości?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A002 • Mozaika z nakrętek

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 18 nakrętek, papier i dwie kredki.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1 Ułóż prostokąt 3×6.



2 Wyróżnij 6 nakrętek.



3 Zapisz udział wyróżnionych w całości i stosunek do pozostałych.

4 Przełóż nakrętki bez zmiany kolorów.

A002 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:



6/18=1/3; 6:12=1:2. Przełożenie nie zmienia udziału.



Pytanie kontrolne:

Co musiałoby się zmienić, aby udział wzrósł?

Dla nauczyciela:



sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A003 • Schody z kwadratów

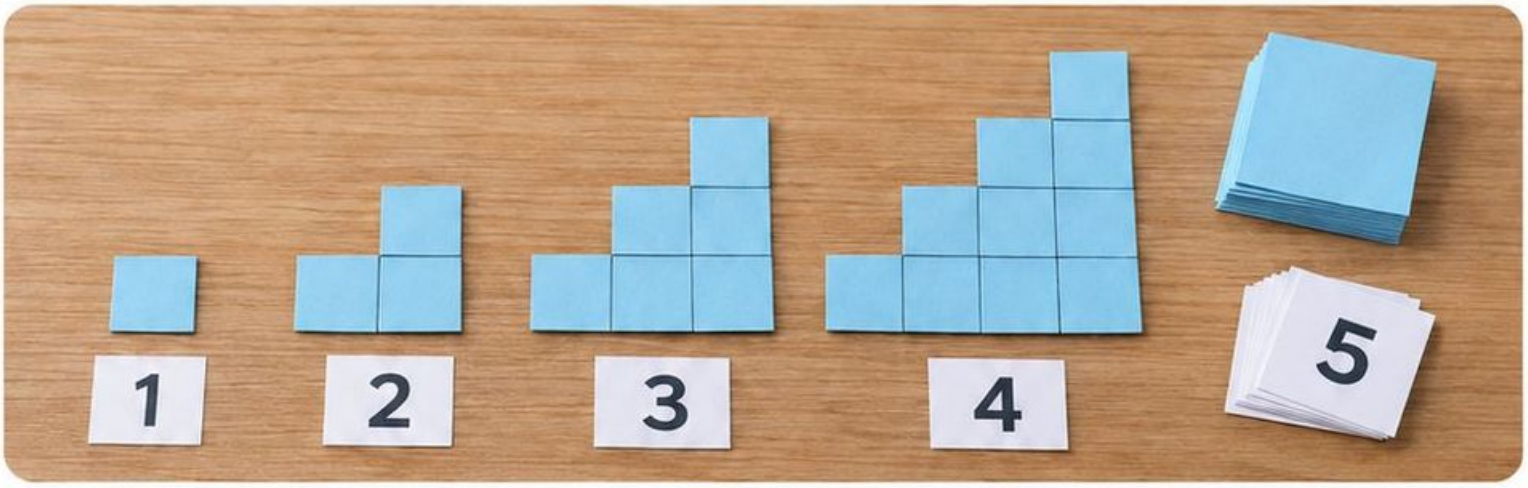
Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papierowe kwadraty i kartki z numerami.

Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut. Zapis: 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.

Buduj schody o kolejnych rzędach 1, 2 i 3 kwadratów. Dodaj czwarty rząd. Policz pola dla wysokości 1–4. Przewidź wynik dla 5 i wykonaj model.



1. Zbuduj kolejne schody o wysokościach 1, 2 i 3.
2. Dodaj czwarty rząd i uzupełnij model.
3. Policz pola dla wysokości 1–4.
4. Przewidź wynik dla 5 i wykonaj model.

A003 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

1; 3; 6; 10; 15; przyrosty 2; 3; 4; 5.

Pytanie kontrolne:

Czy stały przyrost opisuje te schody? Uzasadnij.

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A004 • Jeden pasek, dwie podziałki

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kartonowy pasek, linijka i papierowa podziałka co 1 cm.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Przygotuj kartonowy pasek, linijkę i papierową podziałkę co 1 cm.
2. Zmierz pasek linijką i zapisz wskazanie oraz najmniejszą działkę.
3. Zmierz ten sam pasek podziałką centymetrową i zapisz wskazanie oraz najmniejszą działkę.
4. Porównaj wyniki w milimetrach i sformułuj wniosek.

Przyrząd	Wskazanie	Najmniejsza działka
Linijka		
Podziałka co 1 cm		

Zmierz ten sam pasek linijką i podziałką centymetrową. Zapisz wskazania oraz najmniejszą działkę. Porównaj wyniki w milimetrach. Nie dopisuj dokładności, której przyrząd nie pokazuje.

A004 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium: Wynik zależy od paska. Zapis z dokładnością do 1 cm jest mniej szczegółowy niż odczyt do 1 mm.

Pytanie kontrolne: Czy zapis 12,000 cm jest uzasadniony przy linijce milimetrowej?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A005 • Żywa siatka współrzędnych

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: taśma papierowa, karteczki i pionek.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Zbuduj na stole osie od −3 do 3 z jednakową jednostką.
2. **Umieść pionek w (−2; 1).**
3. Przesuń o 4 jednostki w prawo i 3 w dół. **Zapisz oba punkty.**

A005 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

Punkt końcowy (2; −2). Pierwsza współrzędna opisuje poziom, druga pion.



Pytanie kontrolne:

Czy zamiana kolejności ruchów zmienia punkt końcowy?



Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A006 • Badanie długości ołówków

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 8 ołówków, linijka i papier.



Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut. Zapis: 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.

1. Sformułuj pytanie o długości ołówków.
2. Zmierz każdy do pełnych milimetrów.
3. Zapisz 8 wyników z jednostką, bez nazwisk właścicieli.
4. Zaproponuj sposób uporządkowania danych.

A006 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium: Powstaje tabela 8 pomiarów; wniosek dotyczy tych ołówków, a nie wszystkich ołówków w szkole.

Pytanie kontrolne: Czy można odpowiedzieć, jaka długość wystąpiła najczęściej?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A007 • Sklep z żetonową kasą

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papierowe monety i trzy etykiety cen.

Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut. Zapis: 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.



Przygotuj ceny 17 zł, 26 zł i 38 zł. Kup dwa pierwsze towary, płacąc banknotem 50 zł. Ułóż resztę. Następnie sprawdź, czy 100 zł wystarczy na wszystkie towary.

1. **Przewiduj** Zapisz, jakiej reszty się spodziewasz po zakupie dwóch pierwszych towarów. Czy 100 zł wystarczy na wszystkie towary?
2. **Buduj i sprawdzaj** Użyj papierowych monet. Kup towary za 17 zł i 26 zł, płacąc 50 zł. Ułóż resztę. Następnie sprawdź zakup wszystkich towarów za 100 zł.
3. **Zapisz** Zanotuj wyniki prób i sformułuj wniosek.
4. **Porozmawiaj** Porównajcie wnioski w klasie. Uzasadnijcie, dlaczego tak jest.

A007 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

17 + 26 = 43 zł; reszta 7 zł. Wszystkie kosztują 81 zł, zostaje 19 zł.

Pytanie kontrolne: Jak sprawdzisz resztę działaniem odwrotnym?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

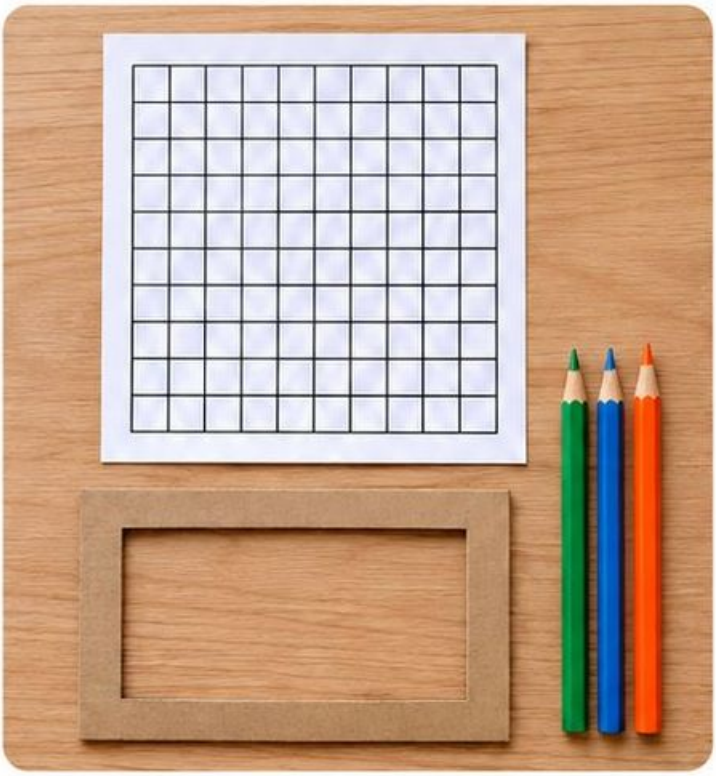
A008 • Procentowe okno

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: siatka 10×10, kartonowa ramka i kredki.

Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Zaznacz 24 pola.
2. Ramką obejmij 20 pól, w tym 6 zaznaczonych.
3. Porównaj udział zaznaczonych w całej siatce i wewnątrz ramki.

A008 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

Całość: 24%. Ramka: 6/20=30%. Różne podstawy dają różne udziały.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego sześć zaznaczonych pól w ramce nie oznacza 6% ramki?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A009 • Maszyna z kopert

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: trzy koperty, karty liczb i strzałki.

Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut.
Zapis: 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.



1. Podpisz koperty: wejście x, mnożenie przez 2, dodawanie 7.
2. Przeprowadź karty −2, 0 i 4 przez maszynę.
3. Zapisz wyrażenie i wyniki.

A009 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:
2 x + 7; wyniki 3; 7; 15.



Pytanie kontrolne: Jakie wejście da wynik 1? Odpowiedź: −3.



Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A010 • Kąt z papierowych ramion

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: dwa paski tektury, spinacz i kątomierz.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Połącz paski tak, by obracały się wokół wspólnego końca.
2. Ustaw 40°, 90° i 130°.
3. Zmierz, naszkicuj i nazwij każdy kąt.
4. Następnie wydłuż ramiona paskami.

A010 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium: 40° ostry; 90° prosty; 130° rozwarty. Długość ramion nie zmienia miary kąta.

Pytanie kontrolne: Jak pokazać, że większy rysunek nie musi oznaczać większego kąta?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A011 • Tabela kroczącego pionka

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: pionek, pasek z podziałką i kartki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Przesuwaj pionek co rundę o 3 pola, startując z pola 2.
Po rundach 0–4 zapisuj pozycję w tabeli. Opisz regułę i przewidź rundę 7.

1. **Przewidywanie (2 minuty)**
   Zapisz, jaką regułę podejrzewasz.
2. **Budowanie i próby (10 minut)**
   Korzystaj z paska z podziałką.
   Wykonaj rundy 0–4 i zapisuj wyniki.
3. **Zapis (5 minut)**
   Uzupełnij tabelę, opisz regułę i przewidź rundę 7.
4. **Rozmowa (3 minuty)**
   Porównaj wnioski w grupie.

Runda	Pozycja pionka
0	
1	
2	
3	
4	

Reguła:

Runda 7:

A011 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

Pozycje 2; 5; 8; 11; 14; $y=3x+2$; runda 7 daje 23.

Pytanie kontrolne:

Co w modelu oznacza wyraz 2?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A012 • Sortownia nakrętek

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 20 nakrętek trzech kolorów i kubki.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Weź 8 nakrętek białych, 7 niebieskich i 5 zielonych. Posortuj, policz i zbuduj tabelę liczebności. Sprawdź sumę, następnie zamień 2 zielone na białe.

1 Przewiduj.
Zapisz, jak zmieni się liczba nakrętek każdego koloru po zamianie.

2 Buduj i próbuj.
Posortuj nakrętki do kubków i policz.

3 Zapisz.
Uzupełnij tabelę liczebności i sprawdź sumę.

4 Rozmawiaj.
Sformułuj wniosek i uzasadnij go.

Kolor	Liczba nakrętek
biały	
niebieski	
zielony	
Razem	

A012 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

Początkowo 8; 7; 5; razem 20. Potem 10; 7; 3; razem nadal 20.

Pytanie kontrolne:

Które liczebności się zmieniły, a która wielkość pozostała stała?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A013 • Układ prostokątny

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 24 żetony i kartka.

Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut. Zapis: 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.



1. Ułóż wszystkie żetony w równych rzędach.
2. Znajdź wszystkie różne liczby rzędów i zapisuj odpowiadające działania.
3. Nie zostawiaj żetonów poza układem.

A013 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

1×24; 2×12; 3×8; 4×6 oraz układy obrócone.
24:6=4.

Pytanie kontrolne:

Skąd wiesz, że nie pominięto żadnej możliwej liczby rzędów?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A014 • Trójki równoważnych kart

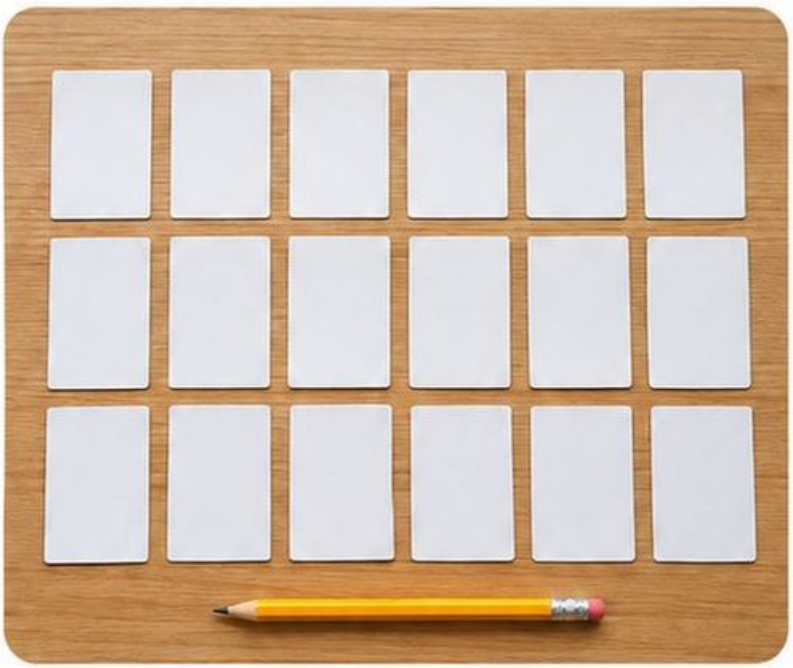
Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 18 pustych kartoników i ołówek.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1. Przygotuj po trzy karty dla 1/2; 1/5; 3/4; 1/10; 2/5; 1/8: ułamek, zapis dziesiętny i procent.
2. Wymieszaj i połącz w trójki.
3. Uzasadnij dopasowania.



A014 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

50%, 20%, 75%, 10%, 40%, 12,5%;
odpowiednio 0,5; 0,2; 0,75; 0,1; 0,4; 0,125.

Pytanie kontrolne:

Której trójki nie da się wygodnie przedstawić w siatce 100 pól bez dzielenia pola?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A015 • Algebraiczne koszyki

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kartoniki z x, y i liczbami.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Rozłóż karty $2x$, $-5x$, $4y$, $3x$, $-y$ i 7 do koszyków wyrazów podobnych. Zredukuj każdą grupę. Sprawdź zapis dla $x=2$, $y=3$.

$2x$	$-5x$	$4y$	$3x$	$-y$	7



1. Przewidź, jaki będzie zredukowany zapis.
2. Rozłóż karty do odpowiednich koszyków wyrazów podobnych.
3. Zredukuj każdą grupę i zapisz otrzymany wyrażenie.
4. Sprawdź poprawność zapisu dla $x=2$, $y=3$.

A015 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:
Współczynnik x wynosi 0; wynik $3y+7$; dla $y=3$ otrzymujemy 16.

Pytanie kontrolne:
Dlaczego nie łączysz $3y$ z liczbą 7?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

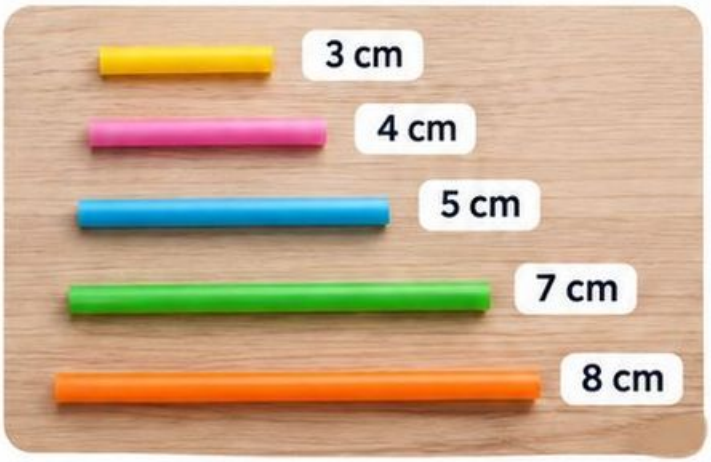
A016 • Złamana granica trójkąta

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: słomki lub paski 3; 4; 5; 7; 8 cm.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Trójka długości	Czy figura zamyka się?
3; 4; 5	
3; 4; 7	
3; 4; 8	

1. Przeczytaj zadanie i przewidź, które trójki utworzą trójkąt.
2. Zbuduj trójkąt z pasków o długościach 3; 4; 5.
3. Powtórz próbę dla trójek 3; 4; 7 i 3; 4; 8.
4. Zapisz w tabeli, czy figura zamyka się bez nakładania i wyginania boków.

Próbuj zbudować trójkąty z trójek 3; 4; 5 oraz 3; 4; 7 i 3; 4; 8. Zapisz, czy figura zamyka się bez nakładania i wyginania boków.

A016 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

3; 4; 5 tworzą trójkąt; 3+4=7 daje linię; 3+4<8 uniemożliwia zamknięcie.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego warunek wymaga ostrej nierówności?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A017 • Papierowy wykres napełnienia

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kubek miarowy, woda i papier.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Zacznij od pustego naczynia. Dolewaj po 50 ml przez 4 rundy. Zapisz łączną objętość po każdej rundzie, dodając punkt startowy. Zbuduj wykres objętości od liczby rund.



Liczba rund	Łączna objętość

1. Przygotuj kubek miarowy, wodę i papier.
2. Zacznij od pustego naczynia.
3. Dolewaj po 50 ml przez 4 rundy.
4. Zapisz łączną objętość po każdej rundzie, dodając punkt startowy.
5. Zbuduj wykres objętości od liczby rund.



Wniosek:

A017 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

Pary (0; 0), (1; 50), (2; 100), (3; 150), (4; 200); objętość w ml.

Pytanie kontrolne:

Czy taki wykres musi opisywać wysokość wody w naczyniu o zmiennej szerokości?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A018 • Słupki z wież

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały:
15 klocków
i trzy etykiety.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1 Zbuduj wieże A=4, B=6, C=5.

2 Narysuj wykres z osią liczebności od zera.

3 Zmień wieżę B, przenosząc do niej 2 klocki z A.

A018 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

Początkowa suma 15. Po zmianie A=2, B=8, C=5. Suma nadal 15.

Pytanie kontrolne:

O ile wzrosła różnica między B i A? Z 2 do 6, czyli o 4.

Dla nauczyciela:

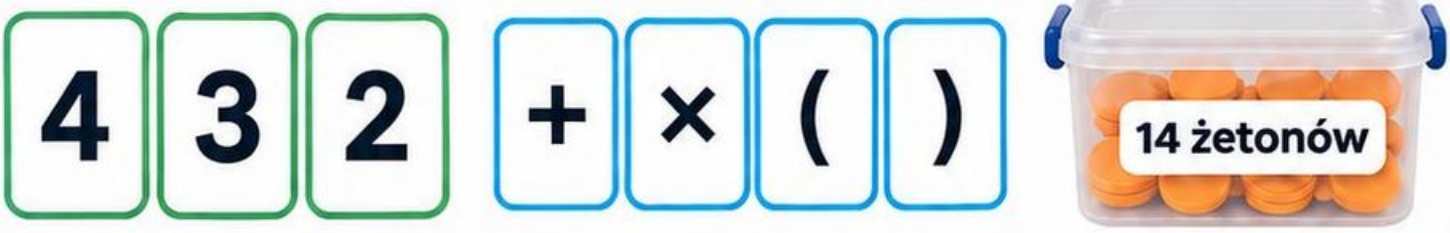
sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A019 • Nawiasy w ruchu

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty z liczbami 4, 3 i 2, znaki działań i nawiasy oraz 14 żetonów.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Zbuduj zapis 4+3×2, potem (4+3)×2. Ułóż żetony zgodnie z każdym zapisem. Porównaj wyniki i opowiedz, co oznaczają nawiasy.

1. **Przewiduj**
   Zapisz, który wynik będzie większy.
2. **Buduj**
   Ułóż karty 4+3×2 i ułóż odpowiednią liczbę żetonów.
3. **Powtórz**
   Ułóż karty (4+3)×2 i ułóż odpowiednią liczbę żetonów.
4. **Porównaj i wnioskuj**
   Porównaj wyniki i napisz, co oznaczają nawiasy.

A019 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: 10 oraz 14. W pierwszym mnożymy 3 przez 2; w drugim podwajamy sumę 7.



Pytanie kontrolne: Jak opisać oba zapisy dwiema różnymi historiami?



Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A020 • Procent z banknotowego paska

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: pasek papieru, 20 żetonów i ołówek.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Pasek oznacza 200 zł. Podziel na 20 równych części.
2. Zaznacz 15%.
3. Zaznacz 35%.
4. Pod każdą częścią połóż żeton opisujący jej wartość.

A020 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:
Jedna część to 5% i 10 zł.
15%=30 zł; 35%=70 zł.

Pytanie kontrolne:
Jak zmienią się kwoty, jeśli ten sam pasek oznacza 300 zł?

Dla nauczyciela:
sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A021 • Pole rozdzielone na części

Klasy 7–8 • 20 minut

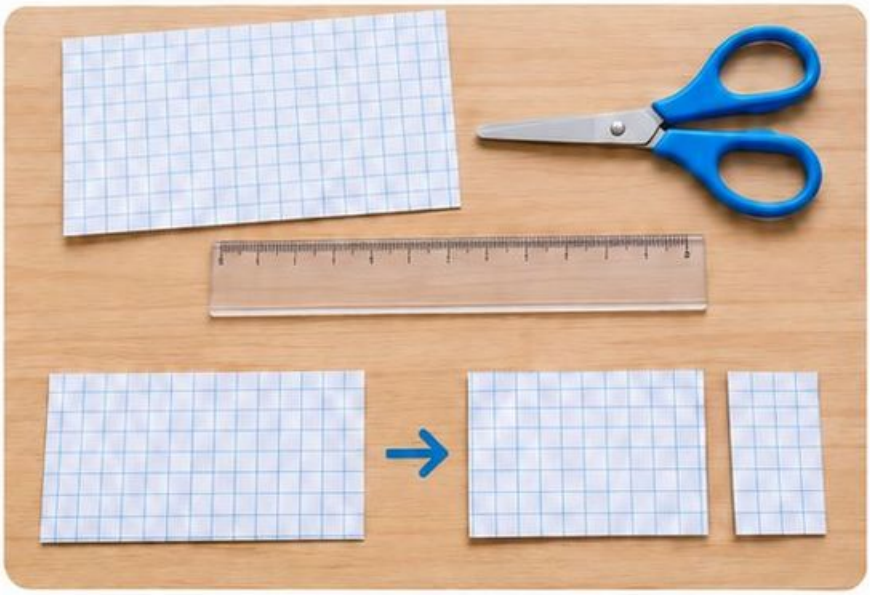
Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papier w kratkę, nożyczki i linijka.

Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut.
Zapis: 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.

Wytnij prostokąt o bokach 4 cm i 7 cm. Przetnij drugi bok na części 5 cm i 2 cm. Zapisz pole całości i póla części. Ułóż ponownie.

1. Wytnij prostokąt o bokach 4 cm i 7 cm.
2. Przetnij drugi bok na części 5 cm i 2 cm.
3. Zapisz pole całości i pola części.
4. Ułóż ponownie.



A021 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:
$4 \times 7 = 4 \times 5 + 4 \times 2 = 28\ cm^2$.



Pytanie kontrolne:
Czy podział na 3 cm i 4 cm zmieni pole?



Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A022 • Klasyfikacja czworokątów

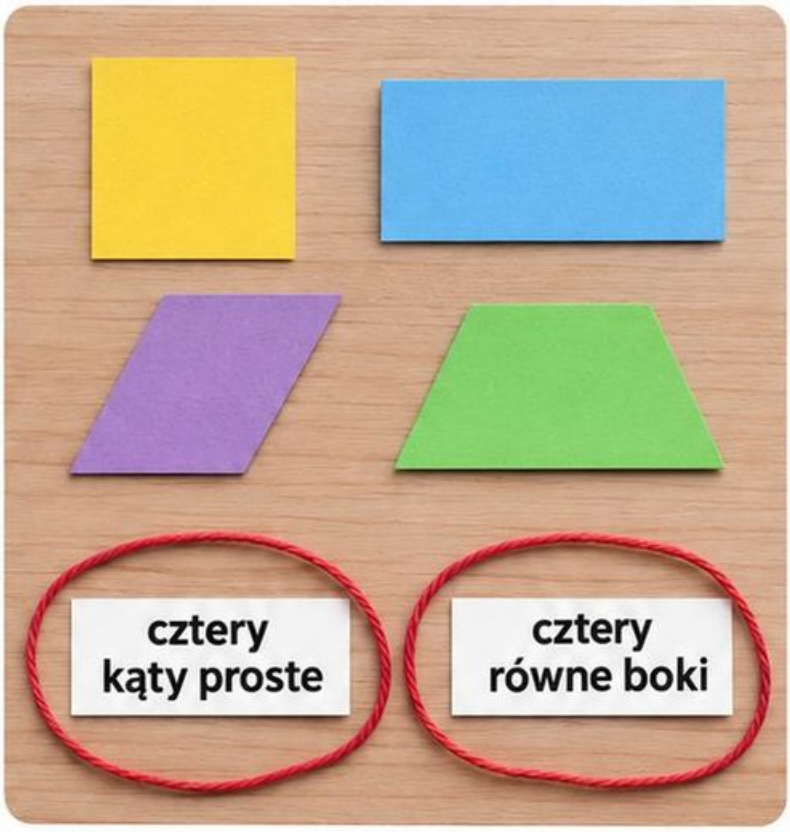
Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kartonowe figury i dwie pętle z nitki.

Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut. Zapis: 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.

1. Wytnij kwadrat, prostokąt niebędący kwadratem, romb niebędący kwadratem i trapez z dokładnie jedną parą boków równoległych.
2. Pętle oznacz „cztery kąty proste” i „cztery równe boki”.
3. Ułóż figury.
4. Zbadaj zależność i uzasadnij wniosek.



A022 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

Kwadrat w części wspólnej; prostokąt tylko w pierwszej; romb tylko w drugiej; wskazany trapez poza obiema.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego figura może należeć do dwóch grup naraz?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A023 • Wykres ceny jednostkowej

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

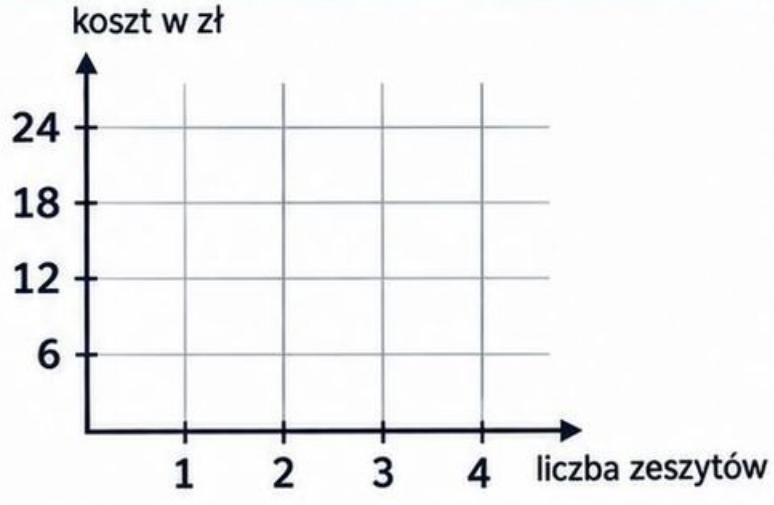
Materiały: nakrętki, etykiety cen i papier.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Jedna nakrętka oznacza 2 zł kosztu. Buduj stosy odpowiadające 1; 2; 3; 4 zeszytom po 6 zł. Zaznacz pary liczba zeszytów–koszt w zł na wykresie.



1. **Przewiduj.** Określ, jak będzie się zmieniał koszt, gdy rośnie liczba zeszytów.
2. **Buduj.** Ułóż z nakrętek stosy dla 1; 2; 3; 4 zeszytów.
3. **Zaznacz.** Zapisz pary liczba zeszytów–koszt w zł na wykresie.
4. **Wniosek.** Sformułuj wniosek o zależności i go uzasadnij.



A023 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:
Koszty 6; 12; 18; 24 zł; $y=6x$.
Wykres przechodzi przez początek.

Pytanie kontrolne: Co zmieni dodanie opłaty początkowej 5 zł?

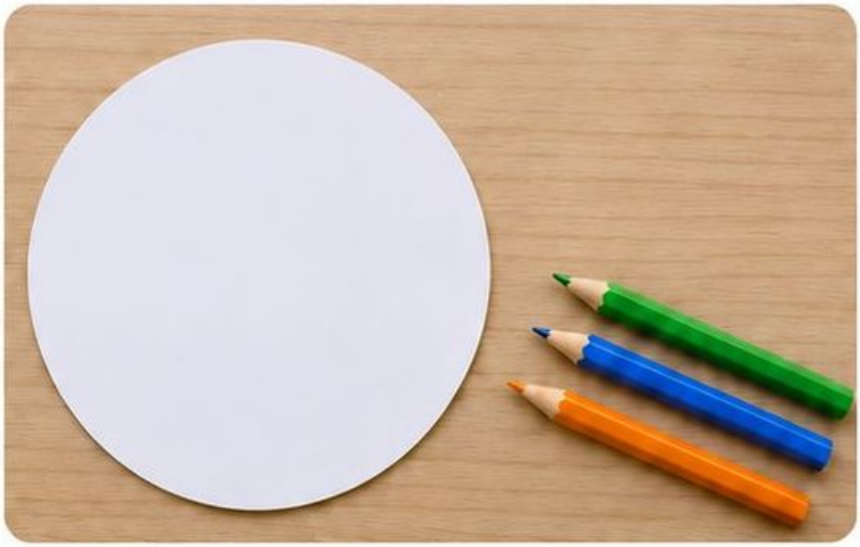
Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A024 • Koło z dziesięciu wycinków

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papierowe koło, kątomierz i kredki.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Podziel koło na 10 sektorów po 36°. Zaznacz 4 sektory kategorią A, 3 kategorią B i 3 kategorią C. Zapisz udziały i kąty kategorii.

1 Przewiduj
Zapisz, jaki wniosek przewidujesz i dlaczego.

2 Buduj
Podziel koło na 10 sektorów po 36°.

3 Zaznaczaj
Zaznacz 4 sektory kategorią A, 3 kategorią B i 3 kategorią C.

4 Zapisz
Uzupełnij tabelę: udziały i kąty kategorii.

Kategoria	Udział	Kąt
A		
B		
C		

A024 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

A 40% i 144°; B 30% i 108°; C 30% i 108°; suma 360°.

Pytanie kontrolne:

Jak sprawdzić podział bez porównywania tylko powierzchni na oko?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

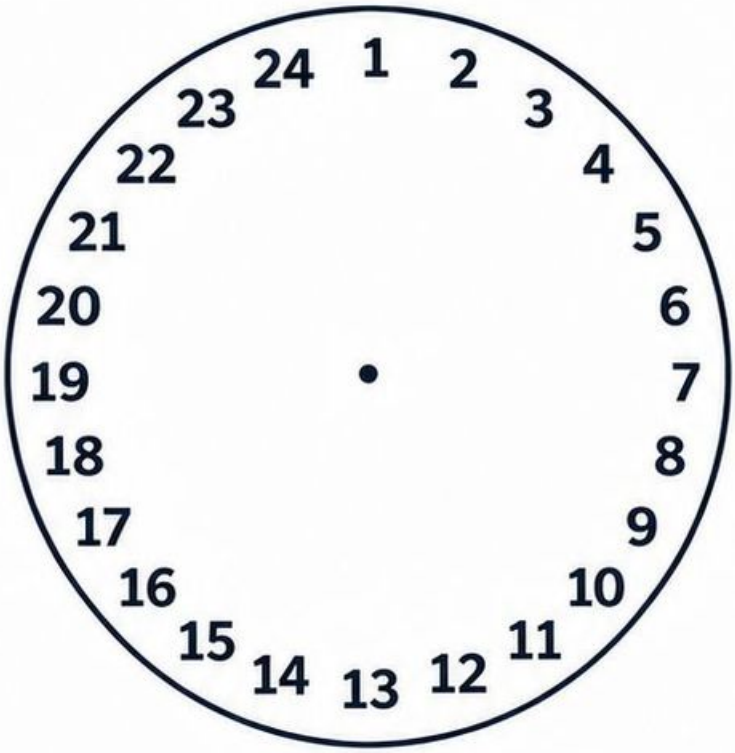
A025 • Zegar wielokrotności

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papierowy okrąg z liczbami 1–24 i dwa kolory.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Zaznacz wielokrotności 4 jednym kolorem, a 6 drugim.
2. Obrysuj liczby zaznaczone dwukrotnie.
3. Ułóż z żetonów równe grupy potwierdzające wynik.

A025 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:
Wspólne: 12 i 24. Najmniejsza dodatnia wspólna wielokrotność to 12.



Pytanie kontrolne:
Dlaczego 0 nie jest na tej planszy, choć też jest wielokrotnością?



Dla nauczyciela:
sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A026 • Zakryta całość

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 20 jednakowych kartoników i koperta.

Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut. Zapis: 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.

Prowadzący wkłada 20 kart do koperty. Wyjmuje 7 i podaje, że to 35% wszystkich. Uczeń odtwarza całość rachunkiem przed otwarciem koperty.





1 Przewidywanie

Zapisz, ile kart – według Ciebie – jest w kopercie. Uzasadnij swoją odpowiedź.

2 Budowanie i próby

Sprawdź swoje przewidywanie na modelu. Wykonaj potrzebne działania.

3 Zapis

Zapisz obliczenia prowadzące do odtworzenia całości.

4 Rozmowa

Sformułuj wniosek o zależności między częścią (7 kart) a całością.

A026 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium: 7:0,35=20. Pozostało 13 kart, czyli 65%.

Pytanie kontrolne: Jak zmieni się całość, jeśli 7 kart oznacza 25%? Będzie 28.

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A027 • Kwadrat z czterech części

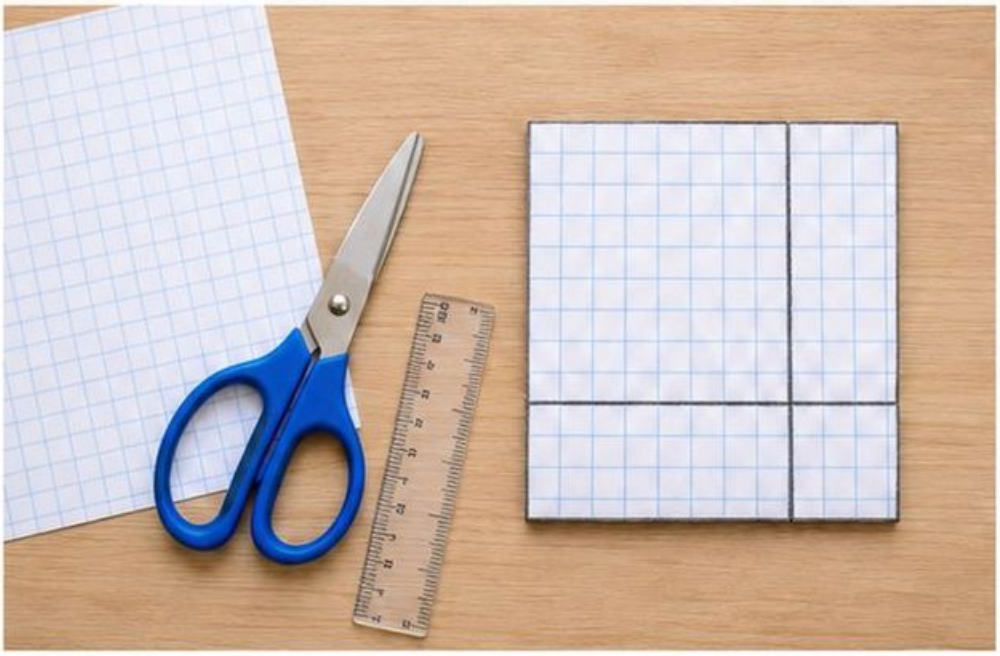
Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papier w kratkę, nożyczki i linijka.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Zbuduj kwadrat boku 7 cm z kwadratów boku 5 i 2 cm oraz dwóch prostokątów 5×2 cm. Podpisz pola. Zapisz tożsamość dla boków a i b.



1. Wytnij kwadrat boku 5 cm, kwadrat boku 2 cm i dwa prostokąty 5×2 cm.
2. Ułóż z wyciętych części kwadrat boku 7 cm.
3. Podpisz pola poszczególnych części.
4. Zapisz tożsamość dla boków a i b.

A027 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

$49 = 25 + 10 + 10 + 4$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego suma pól ma dwa składniki ab?

Dla nauczyciela:

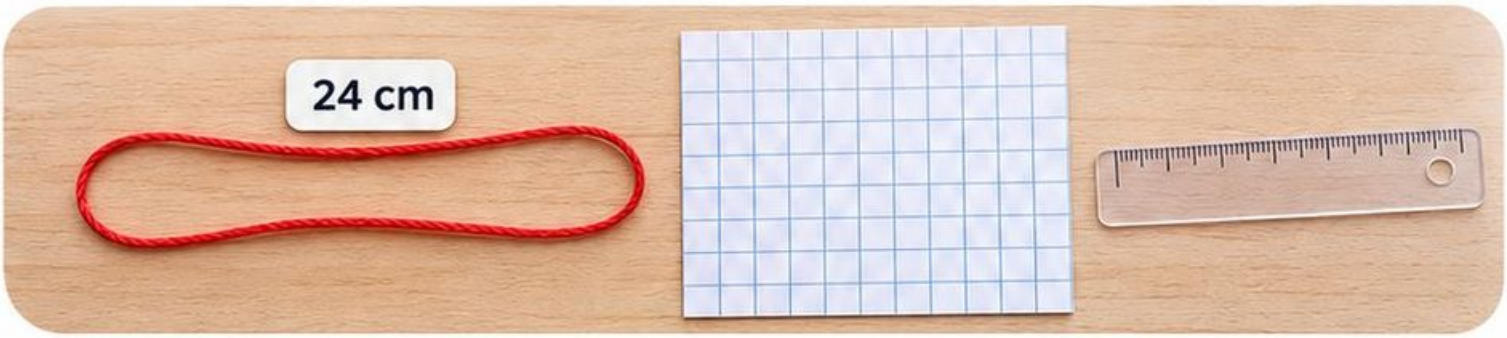
sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A028 • Ta sama nitka, inne pole

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: nitka długości 24 cm, kratka i linijka.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Z nitki układaj prostokąty o bokach całkowitych. Zapisz pary boków i pola. Przewidź największe pole, potem sprawdź wszystkie możliwe pary.

1. Przewidź, która para boków da największe pole. Zapisz swoją przewidywaną parę.
2. Ułóż z nitki prostokąt o wybranych bokach całkowitych. Sprawdź i zmierz boki linijką.
3. Zapisz parę boków i oblicz pole prostokąta.
4. Powtórz dla wszystkich możliwych par boków. Sformułuj wniosek.

A028 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:
$1\times11=11$; $2\times10=20$; $3\times9=27$; $4\times8=32$; $5\times7=35$; $6\times6=36$ cm².

Pytanie kontrolne: Dlaczego stały obwód nie wymusza stałego pola?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

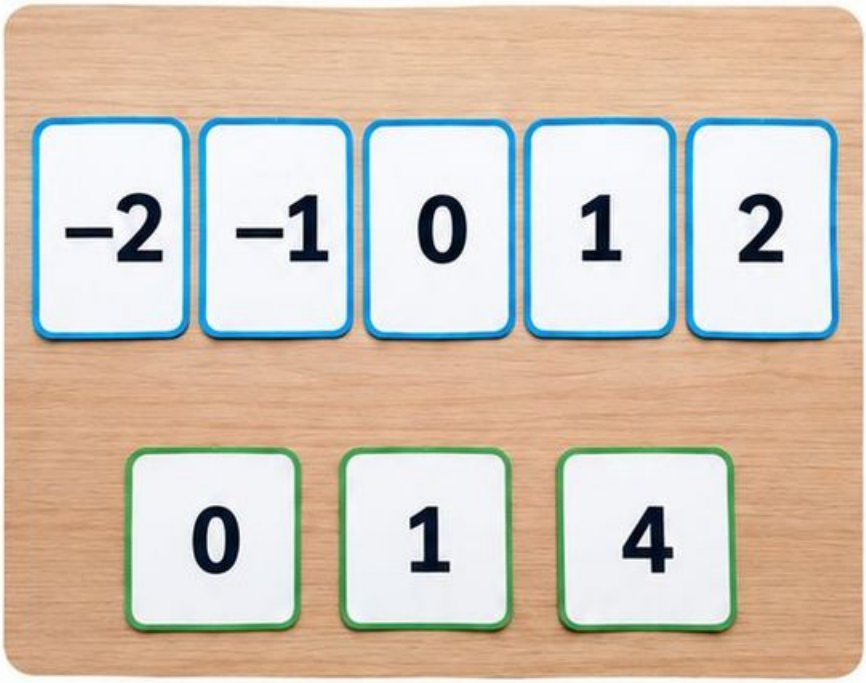
A029 • Funkcja z kart wejścia

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty −2; −1; 0; 1; 2 oraz karty wyników.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Przewiduj, jakie będą wyniki.
2. Ułóż karty jak na ilustracji.
3. Przypisz każdemu wejściu jego kwadrat.
4. Połącz nitką wejścia z wynikami.
5. Zapisz dziedzinę i zbiór wartości modelu.

Przypisz każdemu wejściu jego kwadrat. Połącz nitką wejścia z wynikami. Wypisz dziedzinę i zbiór wartości modelu. Użyj tylko podanych wejść.

A029 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium: Dziedzina {−2; −1; 0; 1; 2}; zbiór wartości {0; 1; 4}. Różne wejścia mogą mieć wspólne wyjście.

Pytanie kontrolne: Czy jednemu wejściu wolno przypisać dwa różne wyniki w tej funkcji?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A030 • Wyrównywanie wież

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 20 klocków i cztery podstawki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Zbuduj wieże o wysokościach 2; 4; 6; 8 klocków.
2. Przenoś klocki bez zmiany ich sumy, aż wieże się wyrównają.
3. Zapisz średnią przed i po.
4. Sformułuj wniosek.

Zbuduj wieże o wysokościach 2; 4; 6; 8 klocków. Przenoś klocki bez zmiany ich sumy, aż wieże się wyrównają. Zapisz średnią przed i po.

A030 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:



20:4=5; końcowo cztery wieże po 5. Średnia pozostaje 5.

Pytanie kontrolne:



Czy zmiana rozkładu musi zmienić średnią przy stałej sumie i liczbie wież?

Dla nauczyciela:



sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A031 • Sito podzielności

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty z liczbami 120; 135; 246; 405; 721; 990.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)

Rozłóż karty w grupach podzielnych przez 2; 3; 5; 9 i 10, pozwalając na przynależność do kilku grup. Dla każdej decyzji zapisz użyte kryterium.

A031 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

Przez 9: 135; 405; 990; przez 10: 120; 990; przez 2: 120; 246; 990; przez 3 wszystkie oprócz 721; przez 5: 120; 135; 405; 990.



Pytanie kontrolne:

Czy podzielność przez 3 oznacza podzielność przez 9?



Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

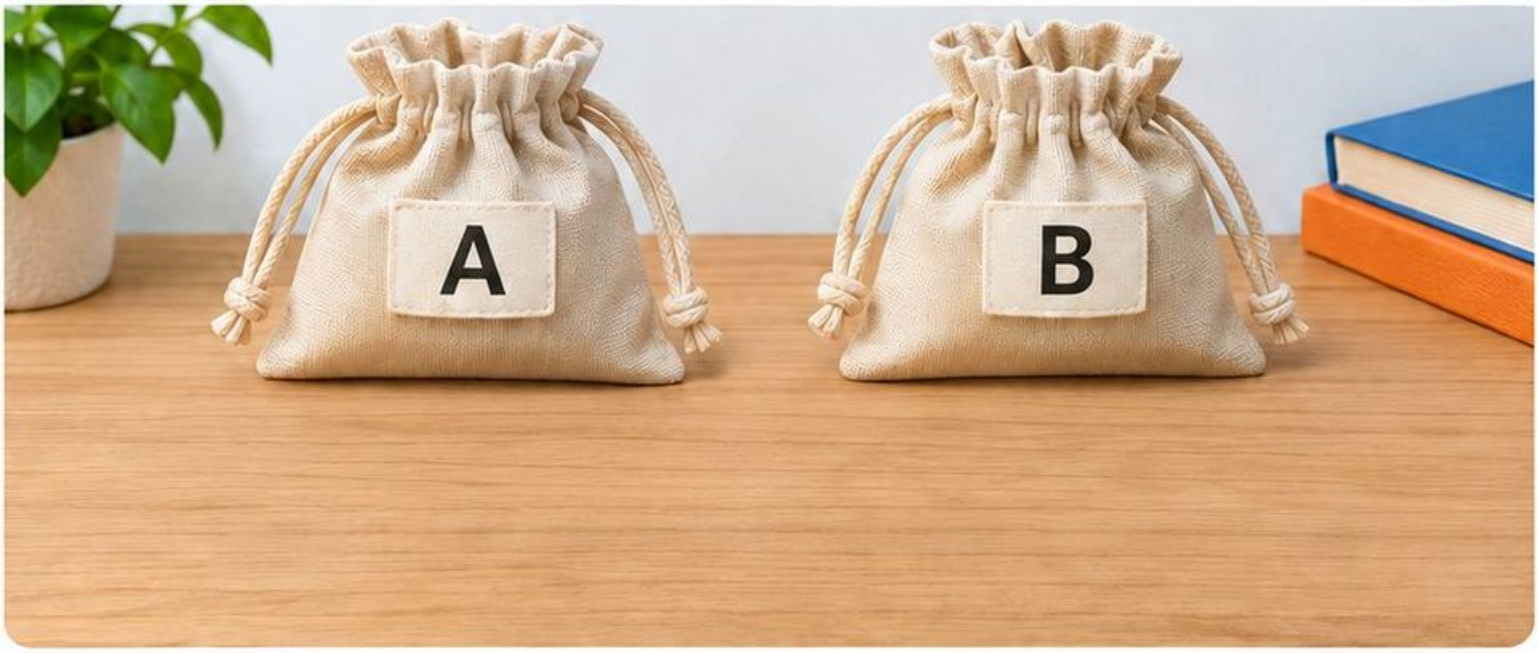
A032 • Porównanie dwóch woreczków

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 20 białych i 10 czarnych żetonów, dwa woreczki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Do A włóż 6 białych i 4 czarne, do B 14 białych i 6 czarnych. Oblicz udziały białych. Przesyp 4 białe z B do A i porównaj nowe udziały.

1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)

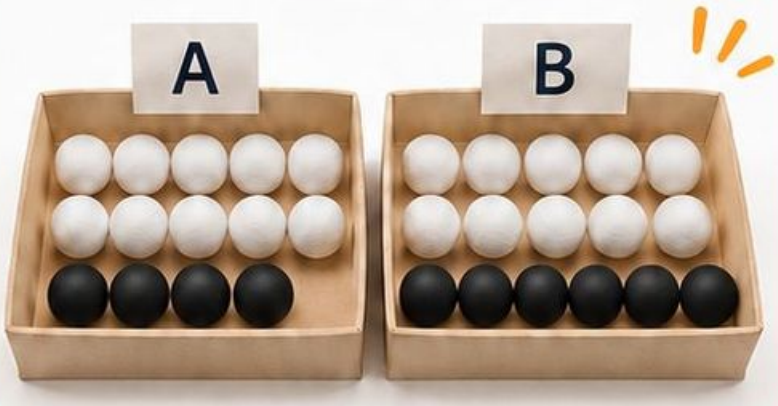
A032 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Dane

Rozwiązanie lub kryterium: Początkowo 60% i 70%.

Model (po zmianie)



Działanie

Potem A 10/14=5/7≈71,4%; B 10/16=62,5%.



Wniosek



Pytanie kontrolne

Dlaczego samo liczenie białych bez liczebności całości nie wystarcza?



Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

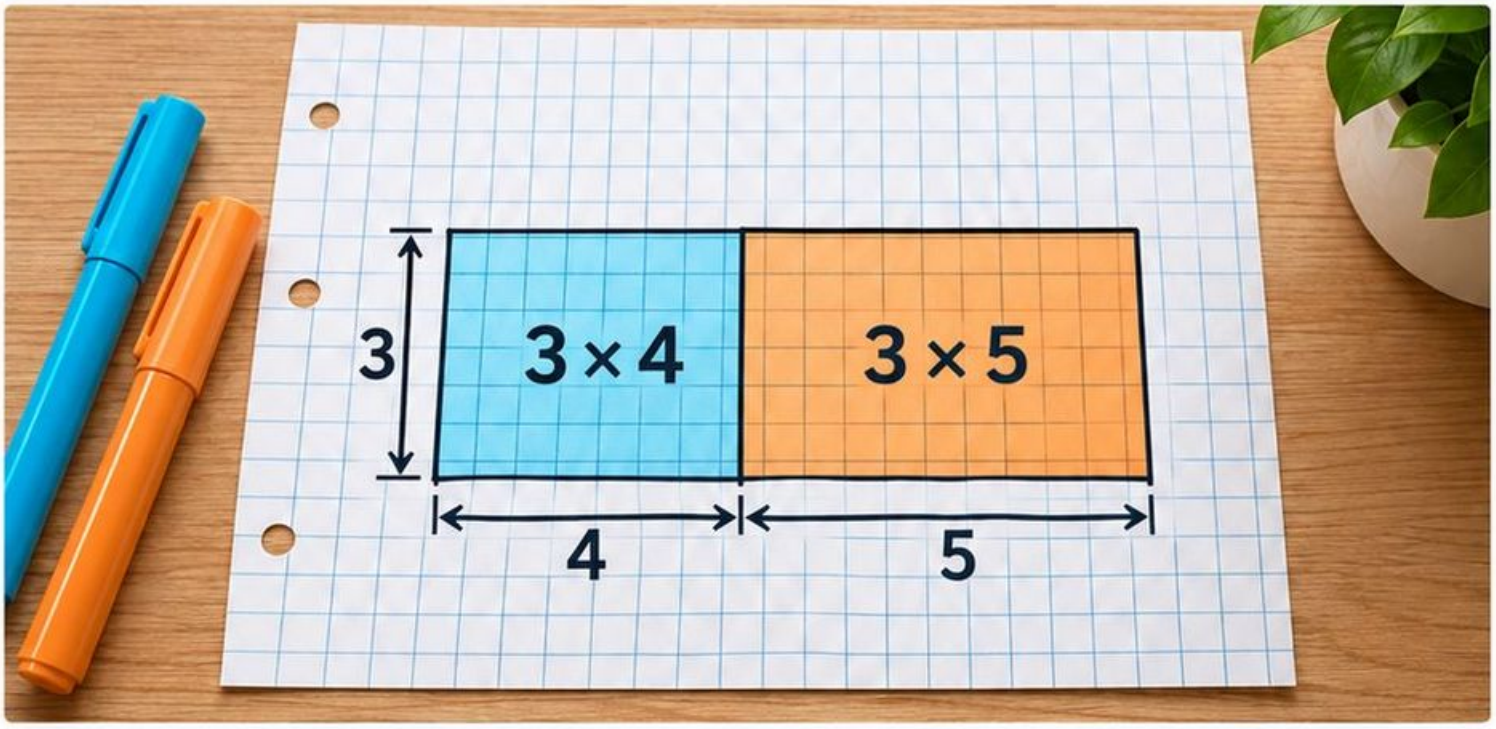
A033 • Wspólna szerokość prostokątów

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papier w kratkę i dwa kolory.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



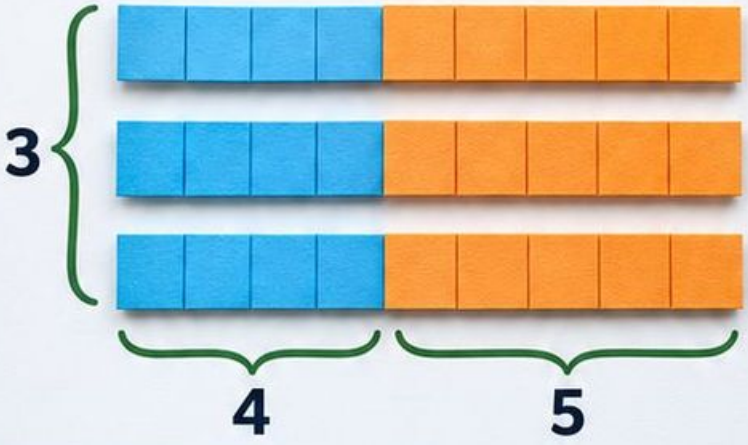
1. Zbuduj sąsiadujące prostokąty 3×4 i 3×5.
2. Podpisz wspólną szerokość.
3. Zapisz pole jako sumę i iloczyn.
4. Następnie zastąp 4 przez *x* i zapisz wzór.

Zbuduj sąsiadujące prostokąty 3×4 i 3×5. Podpisz wspólną szerokość. Zapisz pole jako sumę i iloczyn. Następnie zastąp 4 przez *x* i zapisz wzór.

A033 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model fizyczny



Dane

- Liczby: 12 i 15.
- Wspólny czynnik: 3.

Obliczenie

Rozwiązanie lub kryterium:

$12+15=3(4+5)=27;\ 3x+15=3(x+5).$

Wniosek

Suma 12 i 15 jest równa 27, a wyrażenie $3x+15$ można zapisać jako $3(x+5)$.

Pytanie kontrolne

Który wymiar modelu reprezentuje wspólny czynnik?

Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

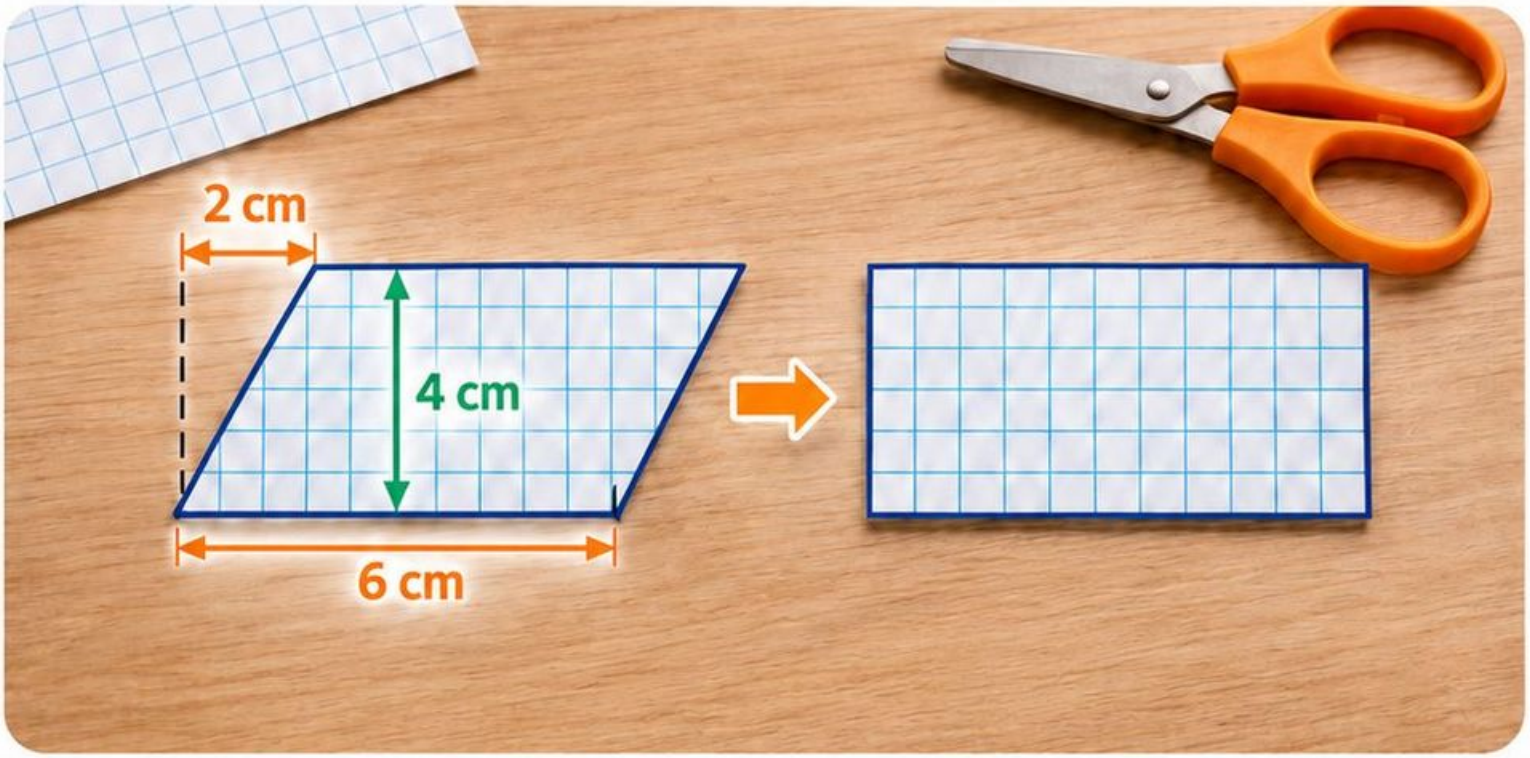
A034 • Równoległobok po przesunięciu

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

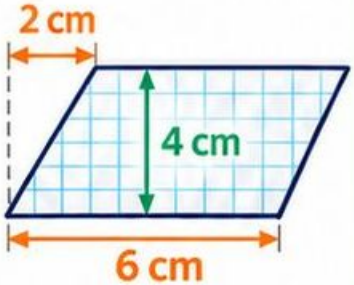
Materiały: papier w kratkę, nożyczki i linijka.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

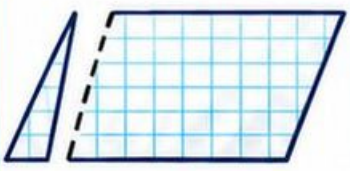


Wytnij równoległobok o podstawie 6 cm, wysokości 4 cm i przesunięciu górnego boku o 2 cm. Odetnij boczny trójkąt i przesuń, tworząc prostokąt.

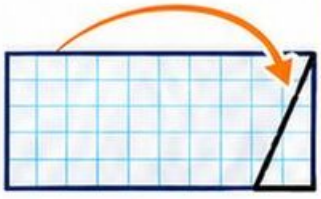
1 Wytnij równoległobok.



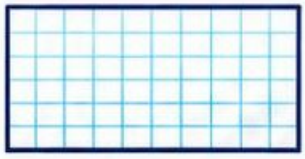
2 Odetnij boczny trójkąt.



3 Przesuń odcięty trójkąt.



4 Powstaje prostokąt.



A034 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Zapis

Rozwiązanie lub kryterium:

Pole 24 cm². Przeniesienie części nie zmienia pola; wysokość staje się drugim bokiem prostokąta.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego długość ukośnego boku nie jest właściwym drugim czynnikiem?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A035 • Znaki na osi wejść

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty liczb od −3 do 3, nitka i etykiety.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.



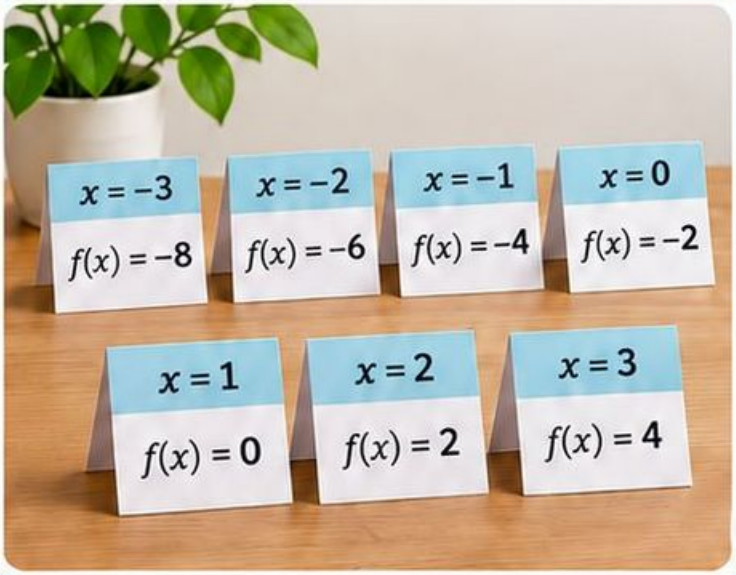
Dla każdej karty oblicz $f(x) = 2x - 2$. Ułóż wejścia na osi, wyniki nad nimi. Oddziel ujemne, zerowe i dodatnie wartości. Następnie rozszerz wniosek na rzeczywiste x.

1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)

A035 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model



Obszar obliczeń

Rozwiązanie lub kryterium

Dla $x = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$ wartości to $-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4$. Zero: $x = 1$. $f(x) < 0$ dla $x < 1$; $f(x) > 0$ dla $x > 1$.

Wniosek

Pytanie kontrolne

Czy samo sprawdzenie siedmiu kart dowodzi wniosku dla wszystkich liczb? Potrzebne rozumowanie algebraiczne.

Dla nauczyciela

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A036 • Mediana w szeregu

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 7 kart z wartościami 8; 3; 6; 6; 2; 9; 20.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Ustaw karty rosnąco i znajdź środkową. Usuń 20 i ponownie wyznacz medianę. Zapisz, jak postępujesz przy parzystej liczbie danych.

1. Ustaw karty rosnąco.
2. Znajdź środkową.
3. Usuń 20 i ponownie wyznacz medianę.
4. Zapisz, jak postępujesz przy parzystej liczbie danych.

A036 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model fizyczny



Dane

2; 3; 6; 6; 8; 9; 20

Działanie

Rozwiązanie lub kryterium

2; 3; 6; 6; 8; 9; 20: mediana 6.
Po usunięciu 20: średnia trzeciej i czwartej wartości=6.

Pytanie kontrolne

Czy mediana musi być jedną z danych przy parzystej liczbie kart?

Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A037 • Prostokąty liczb pierwszych

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: żetony w liczbach 11; 12; 13; 15 i 16.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



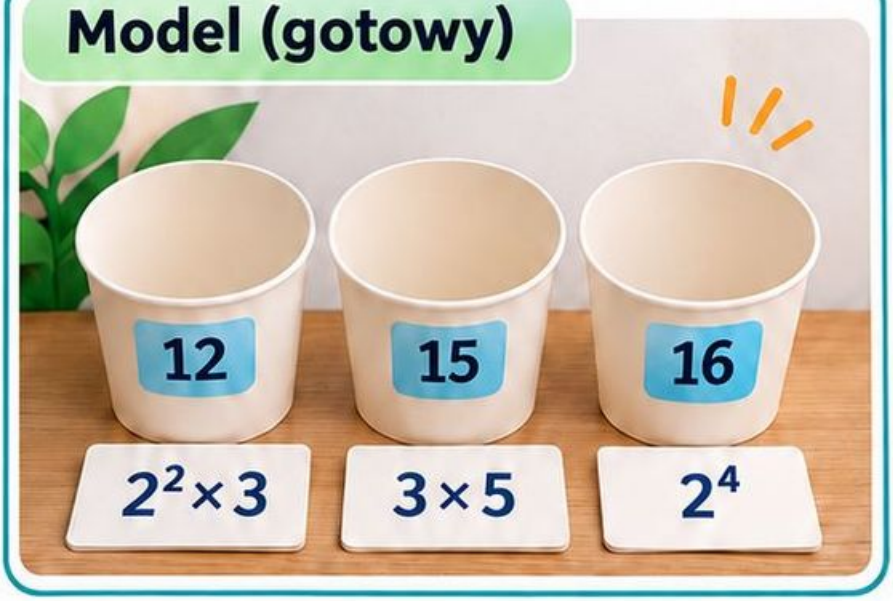
1. **Przewidywanie** — 2 minuty
2. **Budowanie i próby** — 10 minut
3. **Zapis** — 5 minut
4. **Rozmowa** — 3 minuty

Dla każdej liczby układaj pełne prostokątne tablice z równymi rzędami. Odróżnij układy jednowierszowe od pozostałych. Zapisz rozkłady liczb złożonych.

A037 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model (gotowy)



Dane

Pierwsze 11 i 13.

$12 = 2^2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$;

$16 = 2^4$.

Działanie

Rozwiązanie lub kryterium:

Pierwsze 11 i 13. $12 = 2^2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$; $16 = 2^4$.

Wniosek

Liczby 11 i 13 są pierwsze, a liczby 12, 15 i 16 nie są pierwsze.

Pytanie kontrolne

Dlaczego liczby 1 nie zalicza się do pierwszych?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

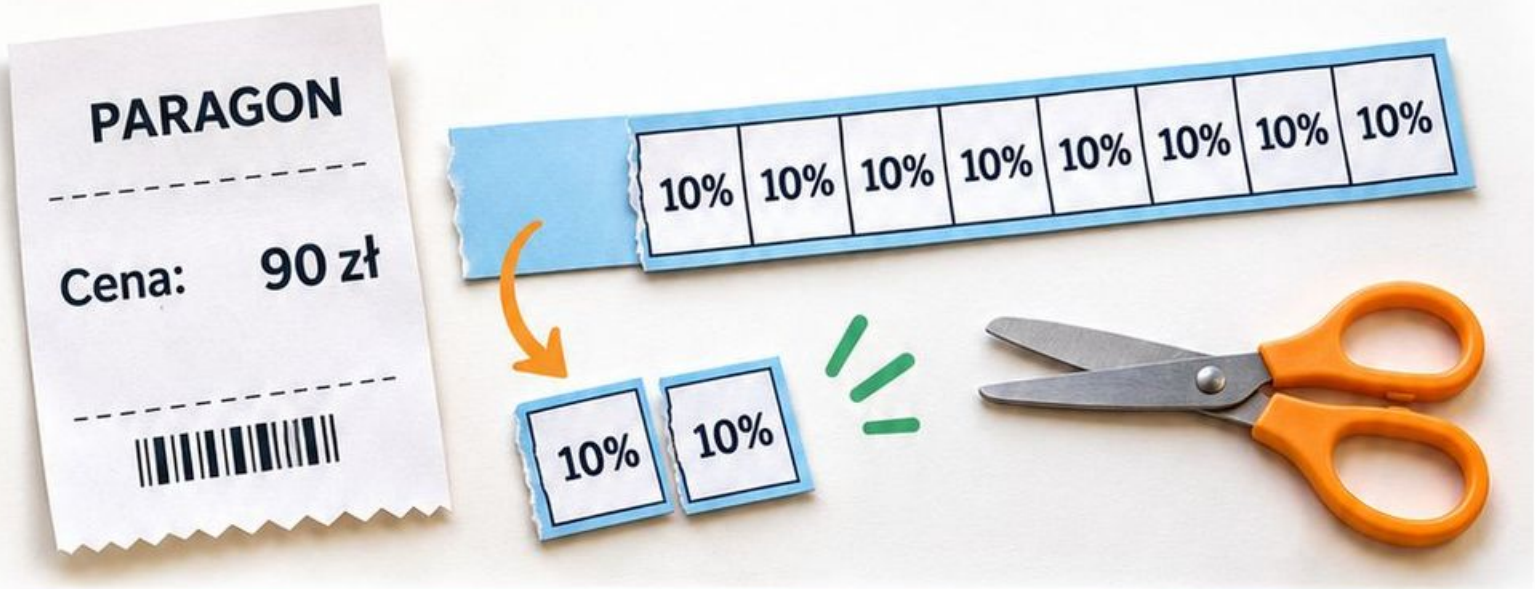
A038 • Rabat na pasku paragonu

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papierowy paragon ceny 90 zł i pasek z 10 polami.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Jedno pole oznacza 10% ceny. Oderwij dwa pola jako rabat 20%. Zapisz kwotę obniżki i nową cenę. Do pozostałej ceny dopisz dostawę 7 zł.

1	2	3	4
Przewidywanie	Budowanie i próby	Zapis	Rozmowa
2 minuty	10 minut	5 minut	3 minuty

A038 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model (zakończony)



Dane

- Rabat 18 zł.
- Cena 72 zł.
- Dostawa 7 zł.

Obliczenie

Wniosek

Rozwiązanie lub kryterium:
Rabat 18 zł; cena 72 zł; pełny koszt 79 zł.

Pytanie kontrolne

Pytanie kontrolne:
Czy rabat obejmuje dopisaną dostawę? W tym modelu nie.

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A039 • Równanie z zakrytą kartą

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: koperta, karty liczb i 17 żetonów.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Zakryj w kopercie kartę liczby x. Połóż obok 5 żetonów, po drugiej stronie 12. Usuń 5 z obu stron i odczytaj wartość koperty. Zapisz operacje.



1 Przygotuj model.



2 Usuń 5 z obu stron.



3 Odczytaj wartość koperty.



4 Zapisz operacje.



A039 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model – gotowy



Dane

Rozwiązanie lub kryterium:
$x+5=12$; $x=7$.
Kontrola $7+5=12$.

Działanie

$$x+5=12$$
$$x=7$$

Kontrola

$$7+5=12.$$

Wniosek

Liczba x jest równa 7.

Pytanie kontrolne

Dlaczego nie można usunąć 5 tylko po jednej stronie?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

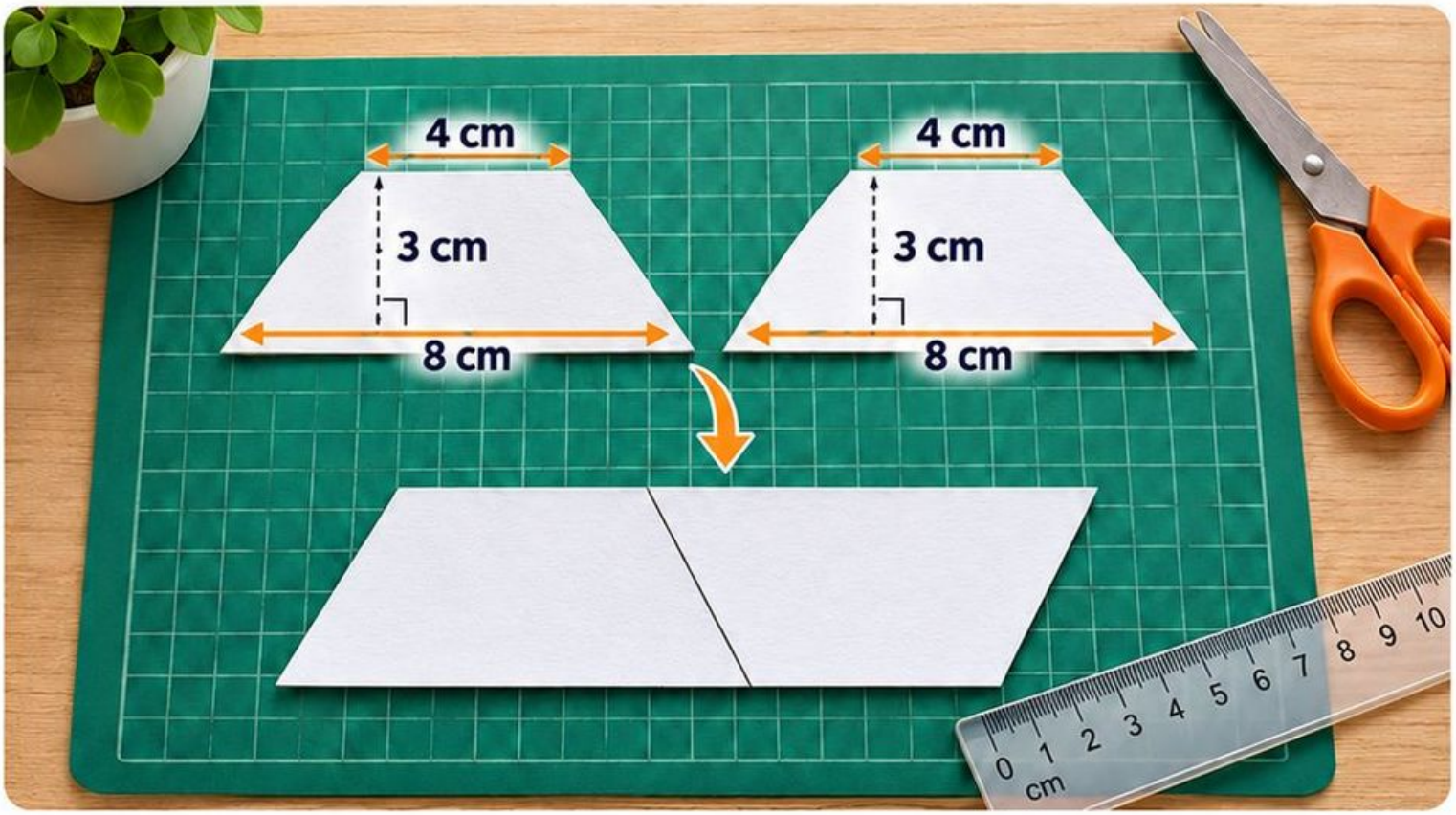
A040 • Podwojony trapez

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: dwa identyczne trapezy papierowe o podstawach 4 i 8 cm, wysokości 3 cm.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Odwróć jeden trapez i dołącz do drugiego tak, by powstał równoległobok.
2. Zmierz jego podstawę i wysokość.
3. Oblicz pole jednej części.

A040 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model



Dane

Podstawa 12 cm, wysokość 3 cm.

Działanie

Całość 36 cm^2; trapez 18 cm^2.

Wniosek

Pole trapezu wynosi 18 cm^2.

Pytanie kontrolne

Skąd we wzorze na pole trapezu bierze się dzielenie przez 2?

Dla nauczyciela

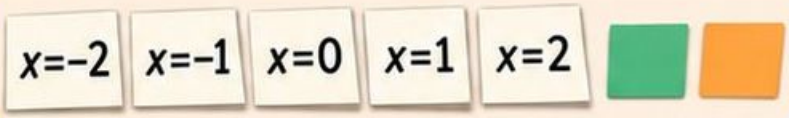
sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A041 • Rośnie czy maleje

Liceum i technikum • 20 minut

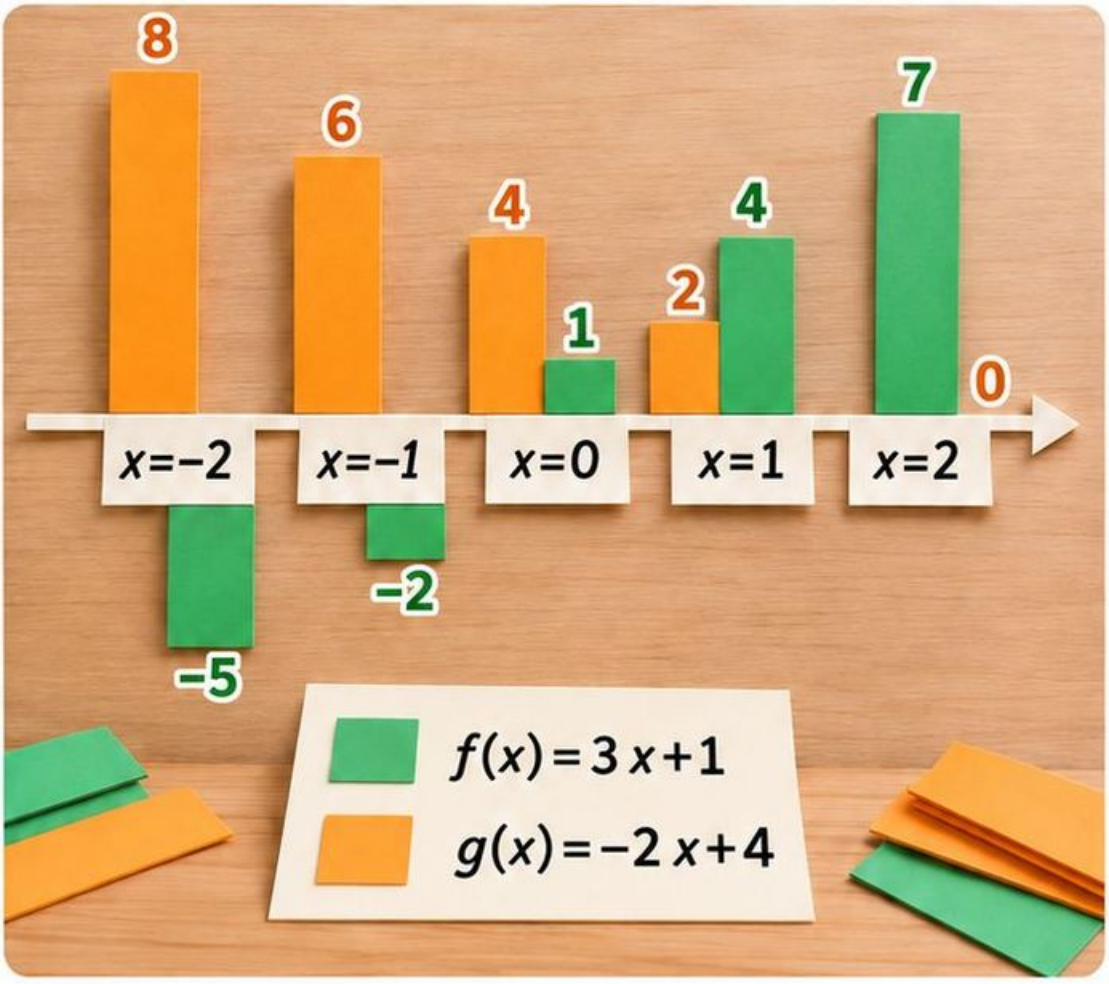
Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty $x=-2; -1; 0; 1; 2$ i dwa kolory.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1. Przewiduj, jak mogą się zmieniać wyniki obu funkcji.
2. Zbuduj model z kart i słupków dla każdej funkcji.
3. Wykonaj próby i porównaj wyniki.
4. Zapisz wniosek i uzasadnij go.

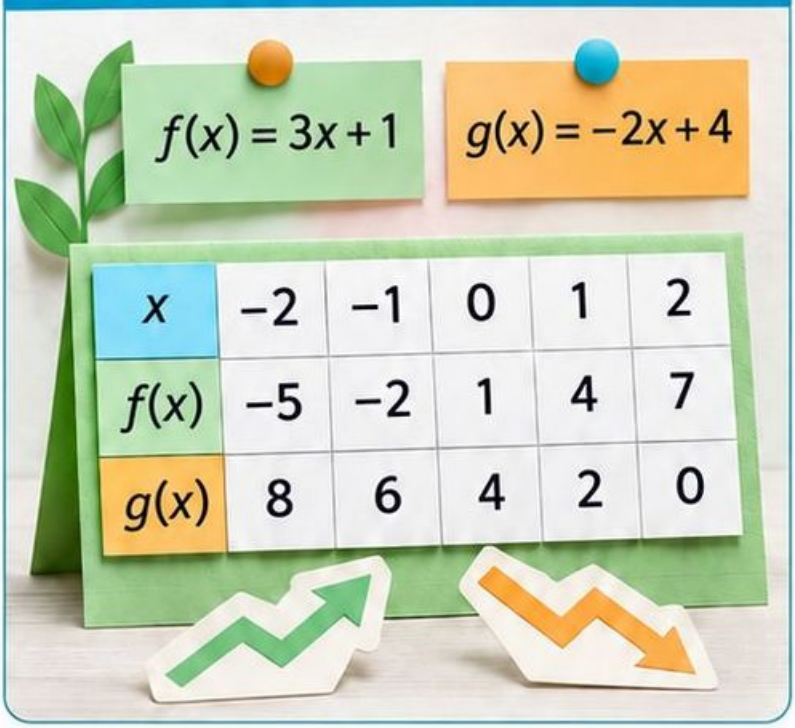


Dla $f(x)=3x+1$ i $g(x)=-2x+4$ oblicz wyniki. Układaj karty od lewej według x, a nad nimi słupki wysokości odpowiadającej wartości; wartości ujemne poniżej osi.

A041 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model badania A041



x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-2	1	4	7
$g(x)$	8	6	4	2	0

Zapis rozwiązania

Rozwiązanie lub kryterium:

f: -5; -2; 1; 4; 7 rośnie; g: 8; 6; 4; 2; 0 maleje.

Pytanie kontrolne:

Jak znaki współczynników 3 i −2 uzasadniają monotoniczność poza wybranymi kartami?

Wniosek

Funkcja f rośnie, a funkcja g maleje.

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A042 • Moda i rozstęp z kart

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty 2; 2; 3; 5; 5; 5; 8.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Ułóż karty w szeregu.
2. Zbuduj stosy równych wartości.
3. Wskaż najwyższy stos i odległość między skrajnymi wartościami.
4. Dodaj kartę 20.

A042 • Zapis i omówienie

Model badania



Polecenie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Miejsce na zapis

Rozwiązanie lub kryterium

Dominanta 5;
rozstęp 8−2=6.

Po dodaniu 20
dominanta 5,
rozstęp 18.

Pytanie kontrolne

Która miara zareagowała na pojedynczą skrajną wartość?

Dla nauczyciela

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

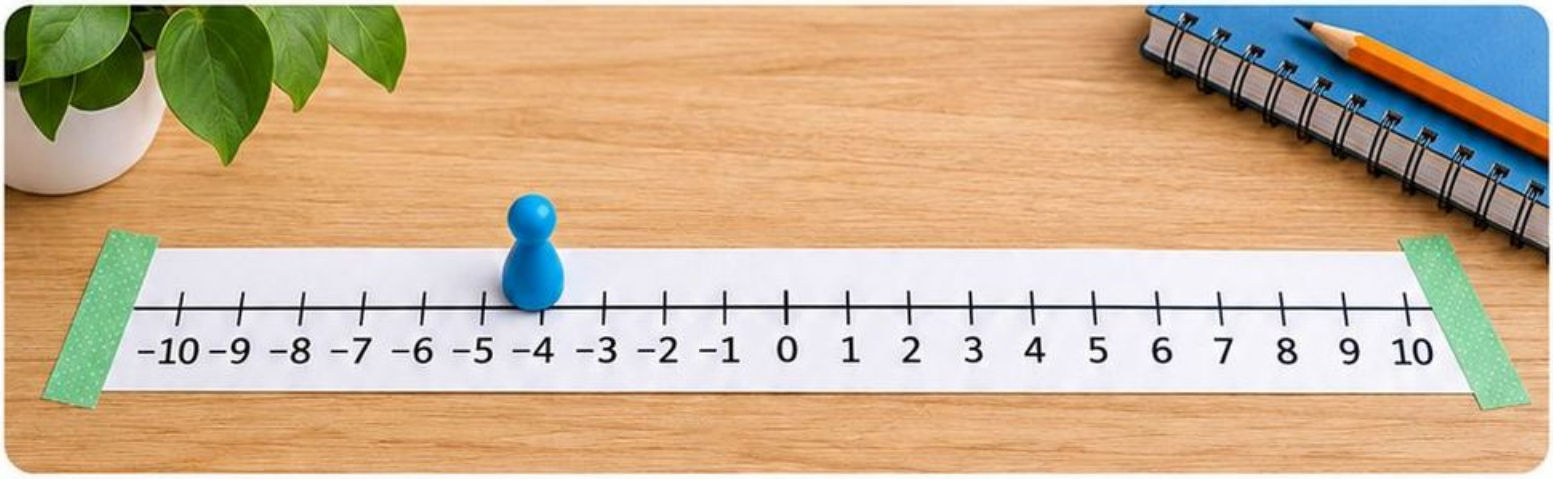
A043 • Spacer po liczbach

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: taśma z osią −10 do 10 i pionek.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Ustaw pionek na −4. Przesuń o 7 w prawo, potem o 5 w lewo. Zapisz działanie i wynik. Powtórz w odwrotnej kolejności ruchów.

1 Ustaw pionek na −4.



2 Przesuń o 7 w prawo.



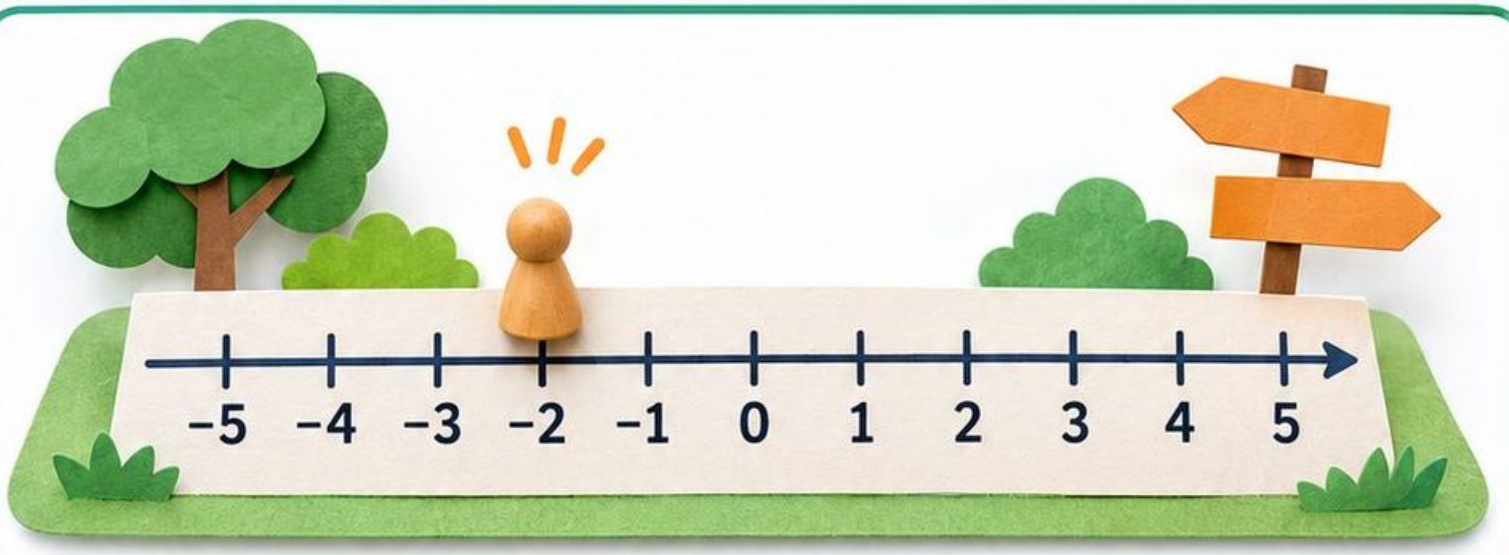
3 Przesuń o 5 w lewo.



4 Powtórz w odwrotnej kolejności ruchów.

A043 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

−4 + 7 − 5 = −2; odwrotna kolejność tych przesunięć daje −2.

Wniosek:

Koniec spaceru to −2, niezależnie od kolejności przesunięć.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego odejmowanie 5 przed dodaniem 7 nie zmieniło końca spaceru?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

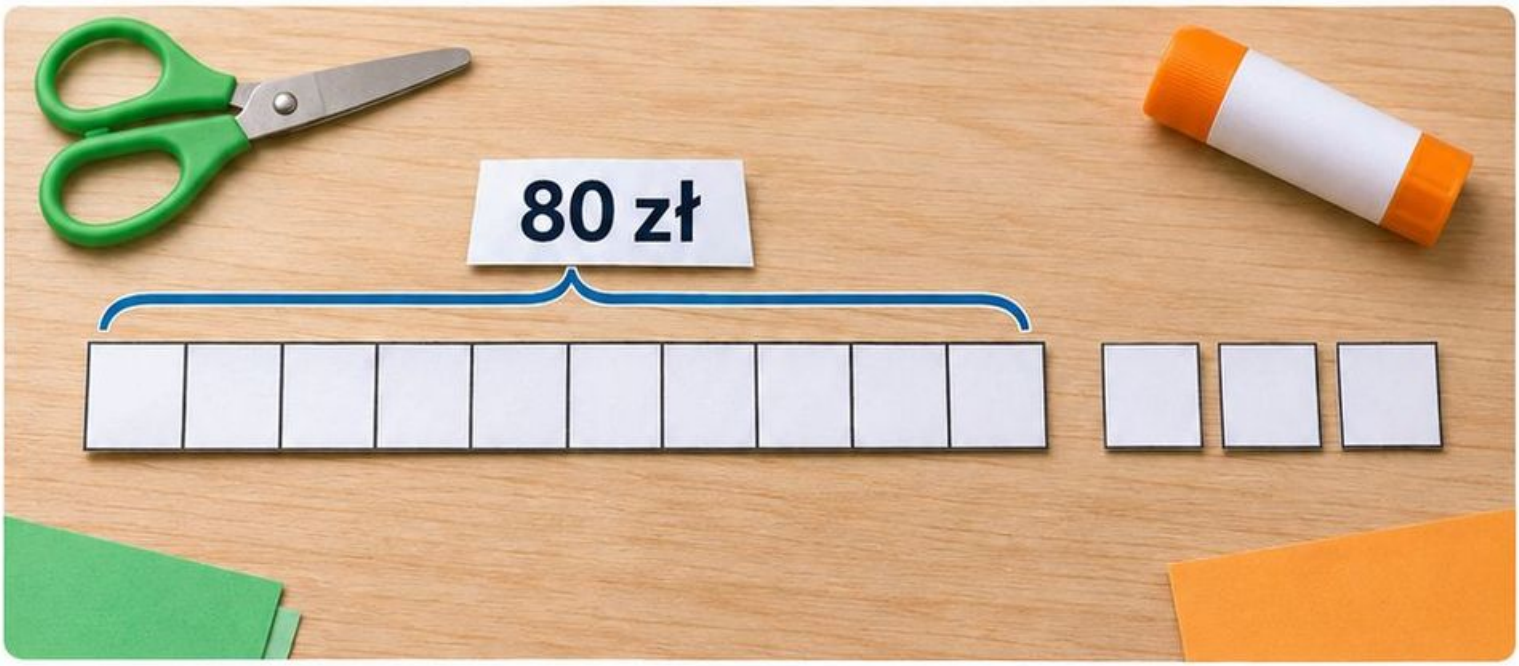
A044 • Podwyżka z doczepką

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: pasek 10 pól i dodatkowe pola tej samej wielkości.

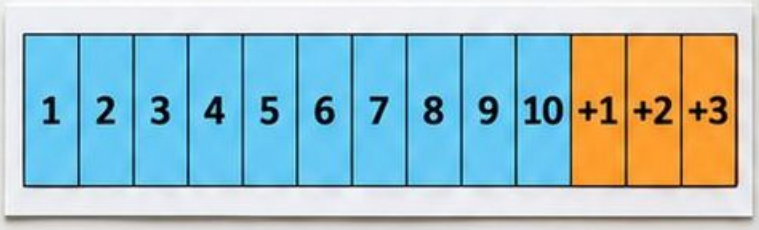
Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Przygotuj pasek 10 pól. Ustal, że cały pasek oznacza 80 zł.
2. Dołącz trzy dodatkowe pola tej samej wielkości jako wzrost 30%.
3. Oblicz cenę końcową.
4. Następnie policz, jaką część nowej ceny stanowi podwyżka.

A044 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



pierwotna cena **80 zł**

podwyżka **24 zł**

Obszar obliczeń

Rozwiązanie lub kryterium: Jedno pole 8 zł; podwyżka 24 zł; nowa 104 zł. $24/104 = 3/13 \approx 23{,}1\%$.

Pytanie kontrolne: Dlaczego 30% pierwotnej ceny nie jest 30% nowej ceny?

Wniosek:

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A045 • Waga z dwoma pudełkami

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: dwie jednakowe koperty i 22 żetony.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Ułóż model $2x+4=18$. Usuń 4 żetony z obu stron, potem podziel pozostałą wartość na dwie jednakowe koperty. Zapisz każdy krok.

1. Ułóż model $2x+4=18$.
2. Usuń 4 żetony z obu stron.
3. Podziel pozostałą wartość na dwie jednakowe koperty. Zapisz każdy krok.

A045 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

$2x=14;\ x=7;$ kontrola $2\times7+4=18.$

Pytanie kontrolne:
Jaki błąd powstanie, jeśli podzielisz przez 2 tylko składnik $2x$?

Wniosek:

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A046 • Nitka wokół pokrywki

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: okrągła pokrywka, nitka i linijka.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Owiń pokrywkę nitką tak, aby nitka dokładnie obejmowała jej obwód.
2. Zmierz średnicę pokrywki.
3. Zmierz długość nitki obejmującej obwód pokrywki.
4. Oblicz iloraz obwodu i średnicy.
5. Porównaj z 3,14 i nazwij źródła odchylenia.

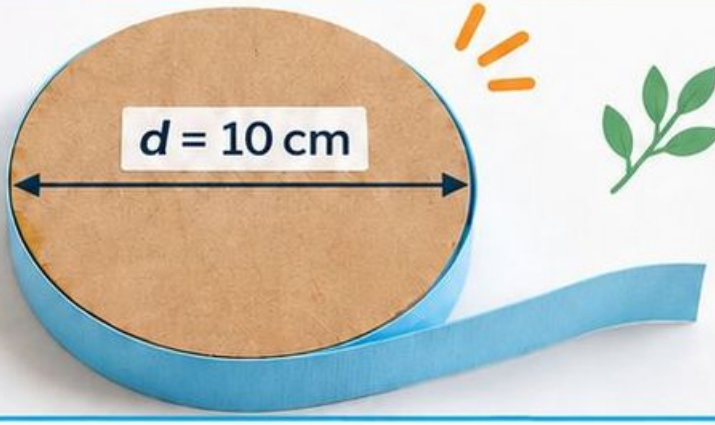
Zmierz średnicę pokrywki oraz długość nitki obejmującej jej obwód. Oblicz iloraz obwodu i średnicy. Porównaj z 3,14 i nazwij źródła odchylenia.

A046 • Zapis i omówienie

Zadanie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model



Obliczenia

Rozwiązanie lub kryterium

Wynik pomiaru powinien być bliski π, ale zależy od dokładności. Dla średnicy 10 cm modelowy obwód $10\pi \approx 31{,}4$ cm.

Pytanie kontrolne

Czy niedokładny pomiar dowodzi, że π zmieniło wartość?

Dla nauczyciela

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

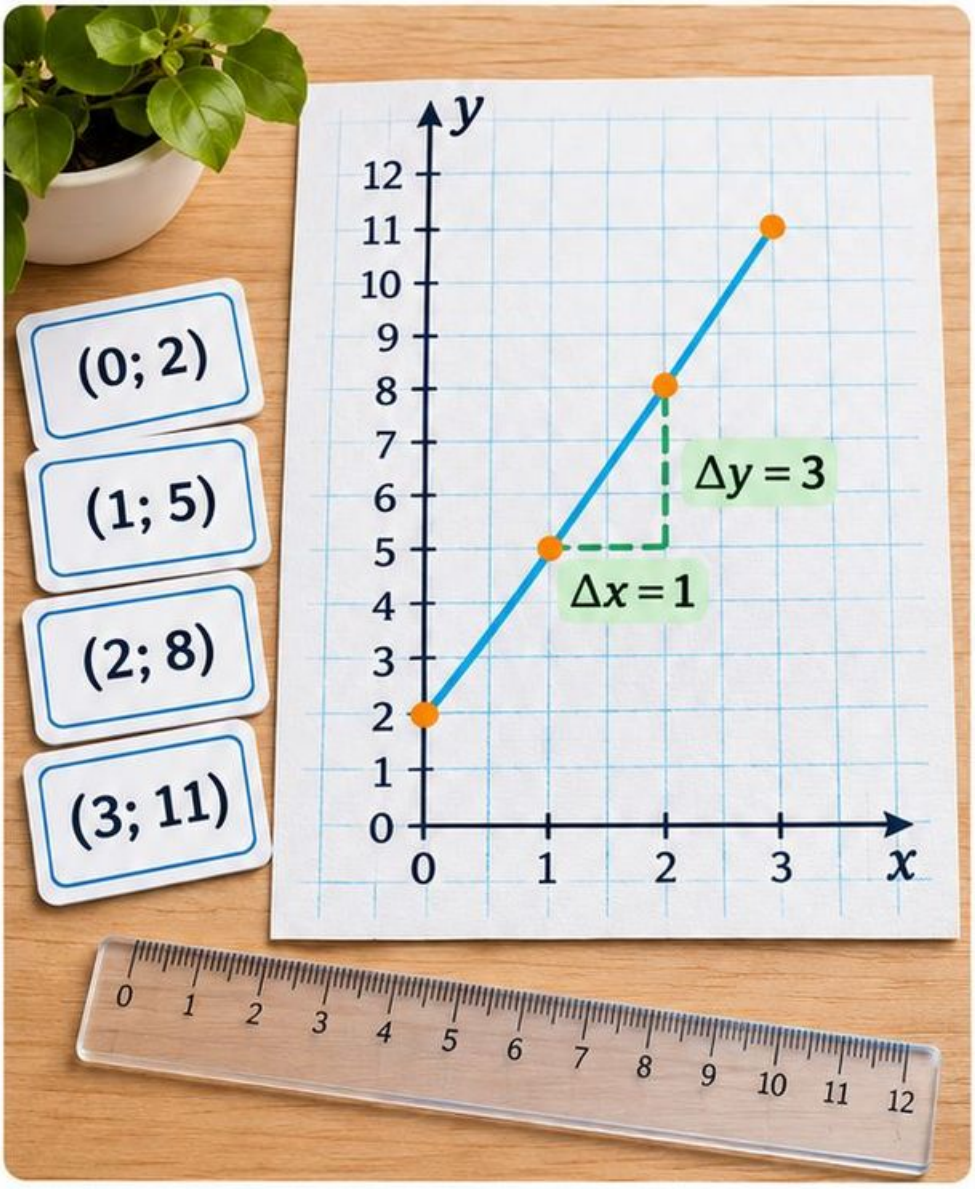
A047 • Nachylenie z jednakowych schodków

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kratka, karty punktów i linijka.

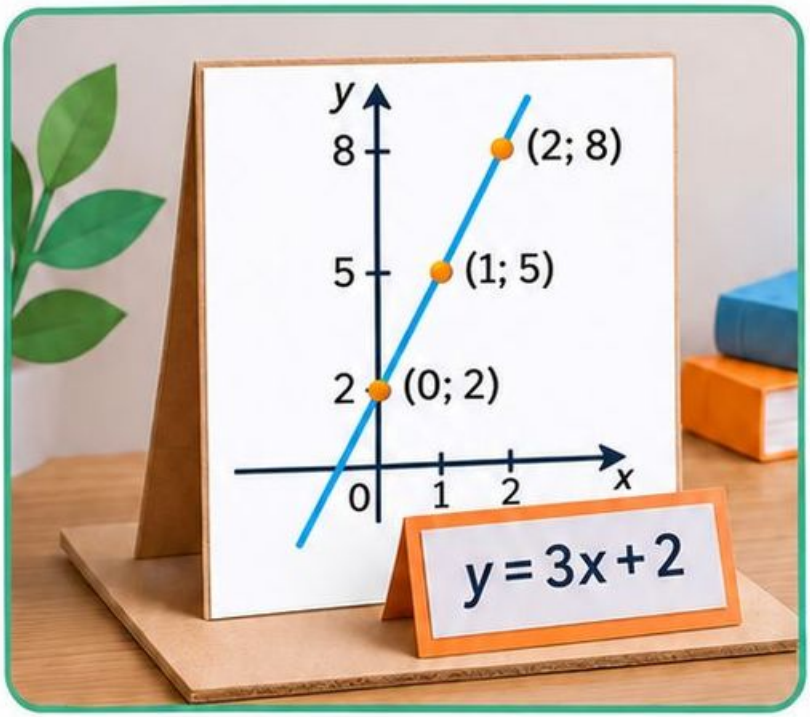
Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Zaznacz (0; 2), (1; 5), (2; 8), (3; 11).
2. Połącz punkty.
3. Zaznacz kroki $\Delta x = 1$ i $\Delta y = 3$.
4. Wskaż punkt przecięcia z osią y.

A047 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Dane

Działanie

Rozwiązanie lub kryterium:

$y = 3x + 2$; współczynnik kierunkowy 3, wyraz wolny 2.

Pytanie kontrolne:

Jak zmieniłby się wykres przy zachowaniu nachylenia i wyrazie wolnym −1?

Wniosek

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A048 • Średnia z wagami

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 10 żetonów i etykiety 2; 4; 6.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Ułóż 2 żetony przy etykiecie 2, pięć żetonów przy etykiecie 4 i trzy przy etykiecie 6.
2. Etykiety oznaczają wartości, liczby żetonów — częstości.
3. Oblicz średnią wszystkich 10 danych.
4.

A048 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model (ukończony)



Dane

- 2 – 2 razy
- 4 – 5 razy
- 6 – 3 razy

Rozwiązanie

Rozwiązanie lub kryterium:
$(2\times2+5\times4+3\times6)/10=42/10=4{,}2.$

Pytanie kontrolne

Pytanie kontrolne: Dlaczego zwykła średnia etykiet (2+4+6)/3 nie opisuje tych danych?

Wniosek

Wniosek: Średnia wartość etykiet w tym modelu wynosi 4,2.

Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A049 • Pary zerowe

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 10 jasnych i 10 ciemnych nakrętek.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



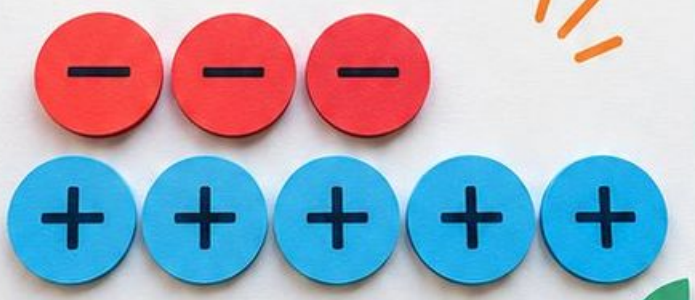
Jasna nakrętka oznacza+1, ciemna −1; para ma wartość 0. Zbuduj −3+5 i usuń pary zerowe. Następnie przedstaw −2−(−4), dodając potrzebne pary zerowe.

1. **Przewidywanie:** 2 minuty.
2. **Budowanie i próby:** 10 minut.
3. **Zapis:** 5 minut.
4. **Rozmowa:** 3 minuty.

A049 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model



Dane

-3 oraz 5;

-2 oraz -4.

Działanie

$-3+5=2$;

$-2-(-4)=2$.

Rozwiązanie lub kryterium

$-3+5=2$; $-2-(-4)=2$.
Dodanie pary zerowej nie zmienia wartości modelu.

Pytanie kontrolne

Dlaczego odebranie czterech ujemnych elementów może zwiększyć wartość?

Wniosek

Dodanie pary zerowej nie zmienia wartości modelu.

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

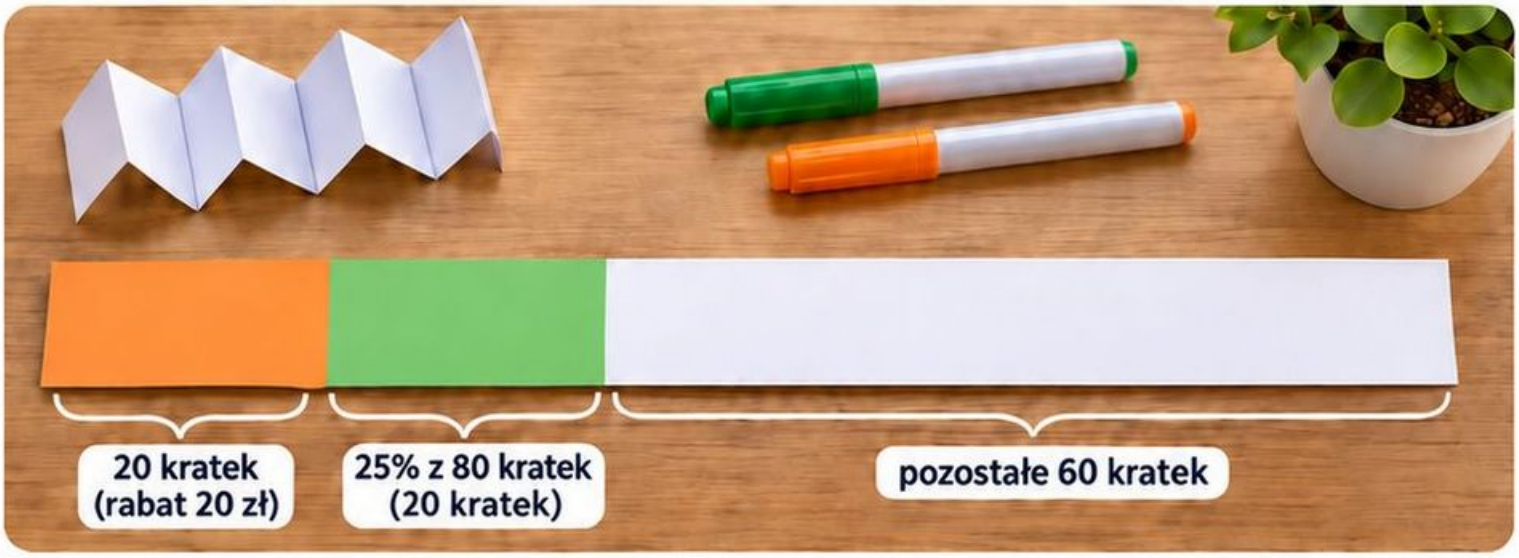
A050 • Kolejne rabaty na składanym pasku

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: pasek 100 kratek i dwa kolory.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. 
   Przewidywanie: 2 minuty.

2. Zaznacz na pasku rabat 20 zł (20 kratek).

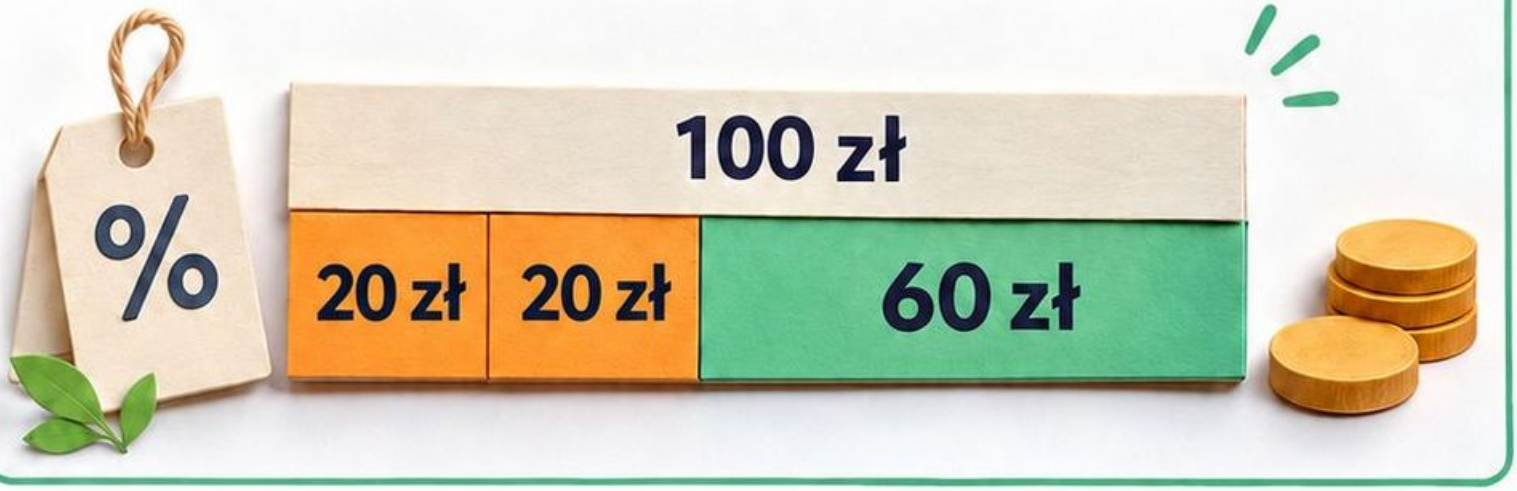
3. Z pozostałych 80 kratek usuń 25% (zaznacz drugim kolorem).

4. Porównaj z jednorazowym rabatem 45% (zaznacz na pasku 45 kratek drugim kolorem).

Pasek oznacza 100 zł. Zaznacz rabat 20 zł, a z pozostałych 80 kratek usuń 25%. Porównaj z jednorazowym rabatem 45%.

A050 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

Pozostało 60 zł; łączny rabat 40%. Jednorazowe 45% dałoby 55 zł.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego 20%+25% nie opisuje łącznego rabatu?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A051 • Przystanek autobusowy z biletami

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papierowe bilety i banknoty.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Bilet grupowy obejmuje opłatę 12 zł oraz 5 zł za osobę. Ułóż model kosztu 47 zł i wyznacz liczbę osób. Każdy bilet ma reprezentować jedną osobę.

A051 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

$12+5n=47;\ n=7.$

Pytanie kontrolne:
Dlaczego liczba osób musi być nieujemną liczbą całkowitą?

Wniosek: Liczba osób wynosi 7.

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

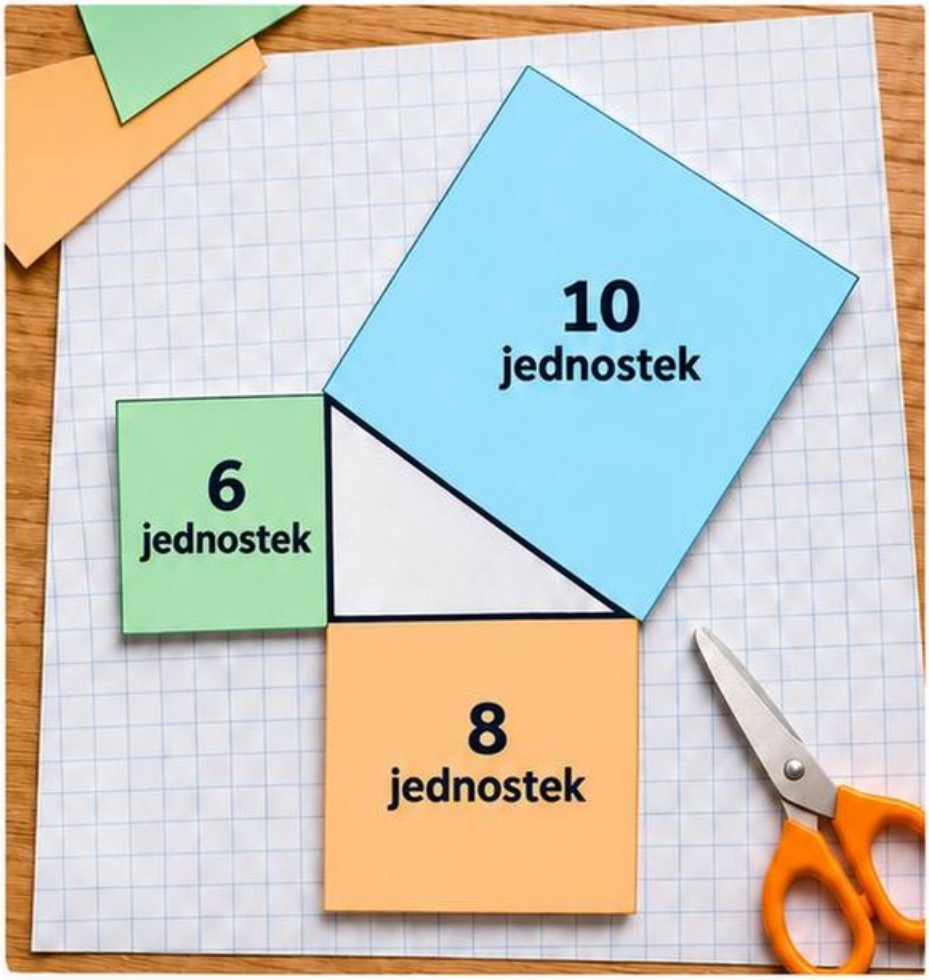
A052 • Kwadraty na bokach

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kratka, nożyczki i trzy kwadraty.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

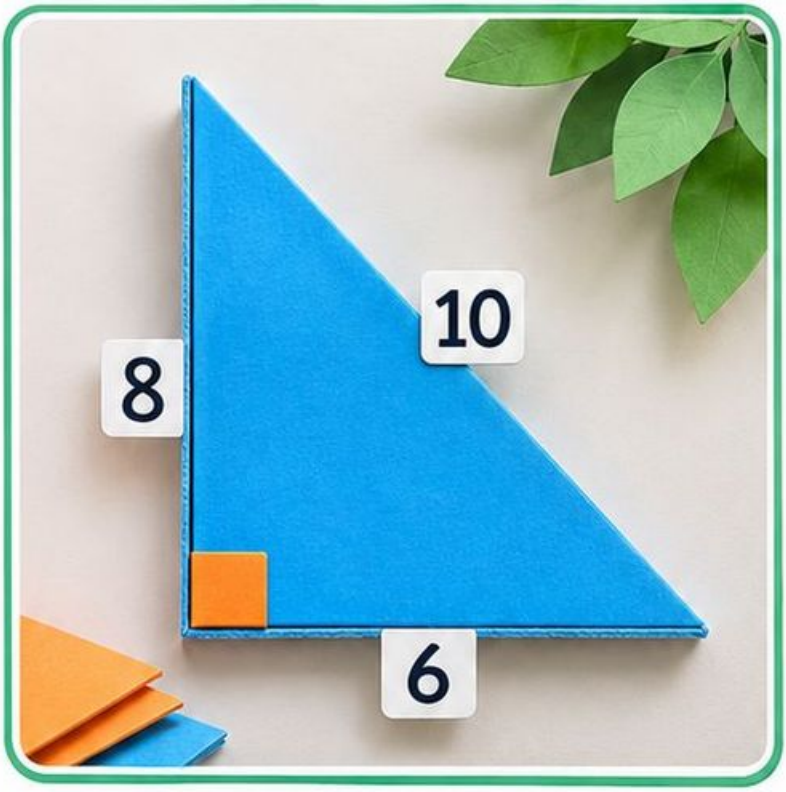


1. Wytnij kwadraty boku 6; 8 i 10 jednostek.
2. Narysuj trójkąt o tych bokach i przypisz mu kwadraty.
3. Policz pola i porównaj sumę dwóch mniejszych z największym.

Wytnij kwadraty boku 6; 8 i 10 jednostek. Narysuj trójkąt o tych bokach i przypisz mu kwadraty. Policz pola i porównaj sumę dwóch mniejszych z największym.

A052 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Dane

6, 8, 10

Działanie

$36+64=100$

Wniosek

Trójkąt prostokątny.

Rozwiązanie lub kryterium:

$36+64=100$; trójkąt prostokątny. Sam wygląd rysunku nie zastępuje rachunku.

Pytanie kontrolne:

Czy boki 6; 8; 11 spełniają tę samą zależność? Nie.

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

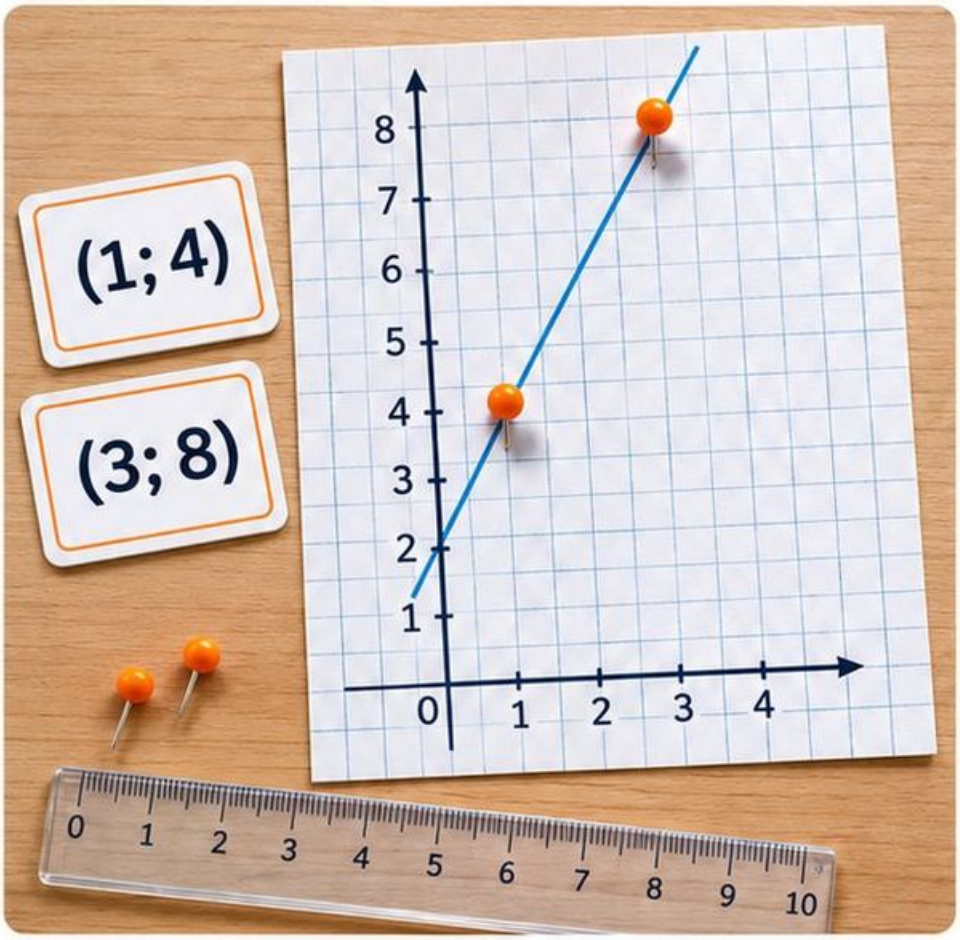
A053 • Prosta z dwóch pinezek papierowych

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty punktów (1; 4), (3; 8), kratka i linijka.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



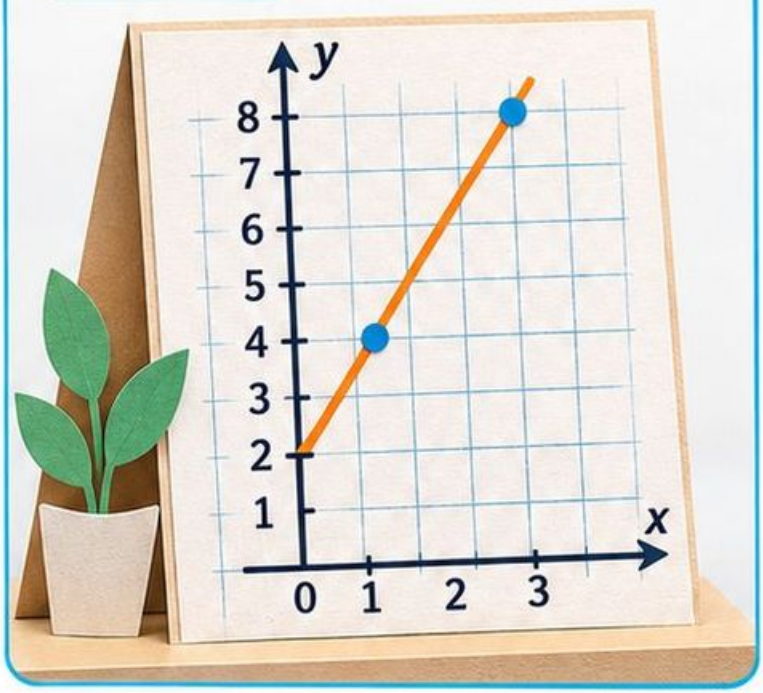
1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)

Zaznacz punkty i poprowadź prostą. Wyznacz przyrosty, współczynnik kierunkowy i wyraz wolny. Sprawdź oba punkty we wzorze.

A053 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model



Rozwiązanie

Rozwiązanie lub kryterium:

$$a = \frac{8-4}{3-1} = 2; \quad b = 2;$$

$$y = 2x + 2.$$

Wniosek

$$y = 2x + 2.$$

Pytanie kontrolne

Pytanie kontrolne:
Jaki punkt na osi y pozwala szybko sprawdzić wyraz wolny?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A054 • Dwa rozkłady z tą samą średnią

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 12 klocków i trzy podstawki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Ułóż wieże 2; 4; 6.
2. Ułóż wieże 1; 4; 7.
3. Oblicz średnią i rozstęp obu układów.
4. Narysuj dwa wykresy ze wspólną skalą.

Ułóż wieże 2; 4; 6, a potem 1; 4; 7. Oblicz średnią i rozstęp obu układów. Narysuj dwa wykresy ze wspólną skalą.

A054 • Zapis i omówienie

Model – gotowy



Zapis

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie

Rozwiązanie lub kryterium:
Obie średnie 4; rozstępy 4 i 6. Stała suma nie wymusza takiego samego rozproszenia.

Pytanie kontrolne

Pytanie kontrolne:
Która para skrajnych wartości pokazuje **większe zróżnicowanie?**

Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami.
Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź.
Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A055 • Składane paski ułamków

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: trzy paski tej samej długości.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Podziel paski odpowiednio na 3; 6 i 12 równych części. Zaznacz 2/3; 4/6 i 8/12. Nałóż na siebie i porównaj końce zaznaczeń.

1. **Podziel**
2. **Zaznacz**
3. **Nałóż**
4. **Porównaj**

A055 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.





2/3 = 4/6 = 8/12

Zapis

Rozwiązanie lub kryterium:

2/3 = 4/6 = 8/12. Mnożenie licznika i mianownika przez ten sam niezerowy czynnik zachowuje wartość ułamka.

Pytanie kontrolne:

Czy dodanie 2 do obu części zapisu 2/3 zachowuje wartość? 4/5 nie jest równe 2/3.

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

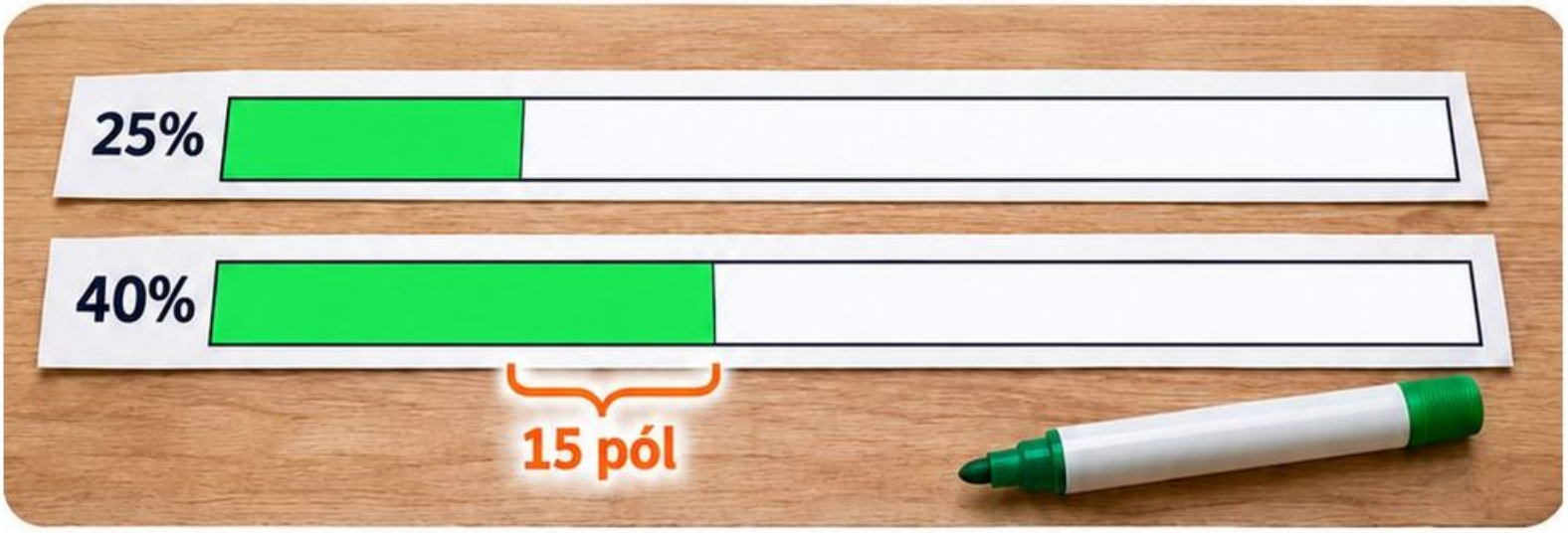
A056 • Przesuwne udziały

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: dwa paski po 100 pól i marker.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Na jednym zaznacz 25%, na drugim 40%. Zaznacz różnicę 15 pól. Oblicz różnicę w punktach procentowych i względny wzrost względem 25%.

1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)

A056 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:
15 p.p.; 15/25=60%.

Pytanie kontrolne:
Dlaczego dwa poprawne wyniki 15 i 60 opisują różne porównania?



Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A057 • Przekształcanie wzoru paskiem

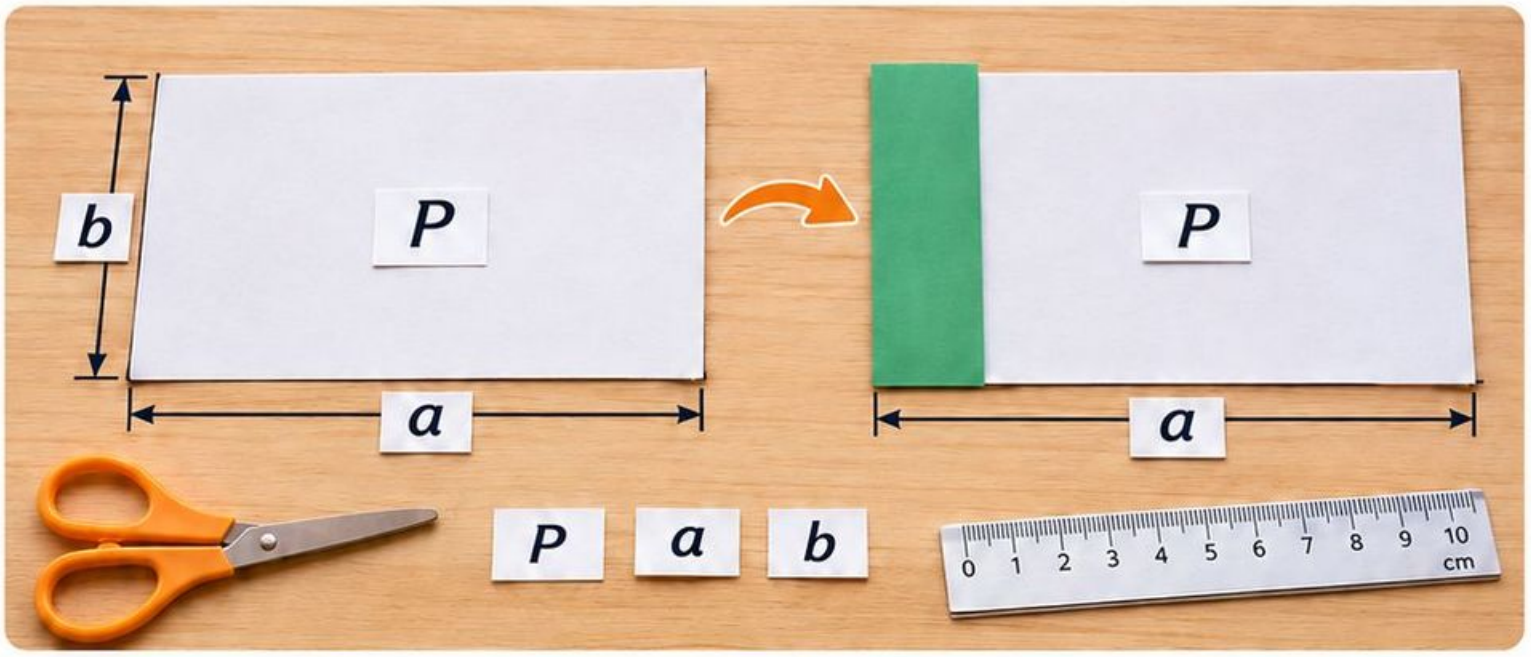
Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

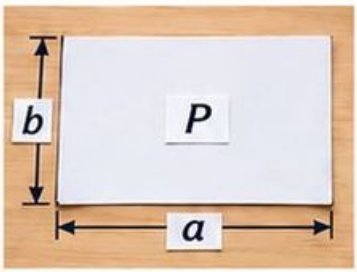
Materiały: prostokąt z papieru i etykiety *P*, *a*, *b*.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

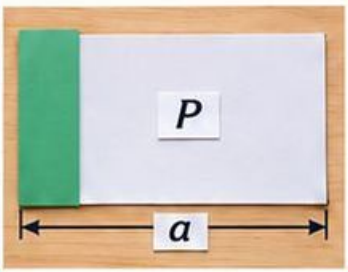
Oznacz pole *P* i boki *a*, *b*. Zakryj bok *b* i wyprowadź $b=P/a$ dla $a>0$. Odtwórz *b* dla $P=72\ \text{cm}^2$ i $a=9$ cm, mierząc model w umownej skali.



1 Oznacz pole *P* i boki *a*, *b*.



2 Zakryj bok *b*.



3 Wyprowadź $b=P/a$ dla $a>0$.

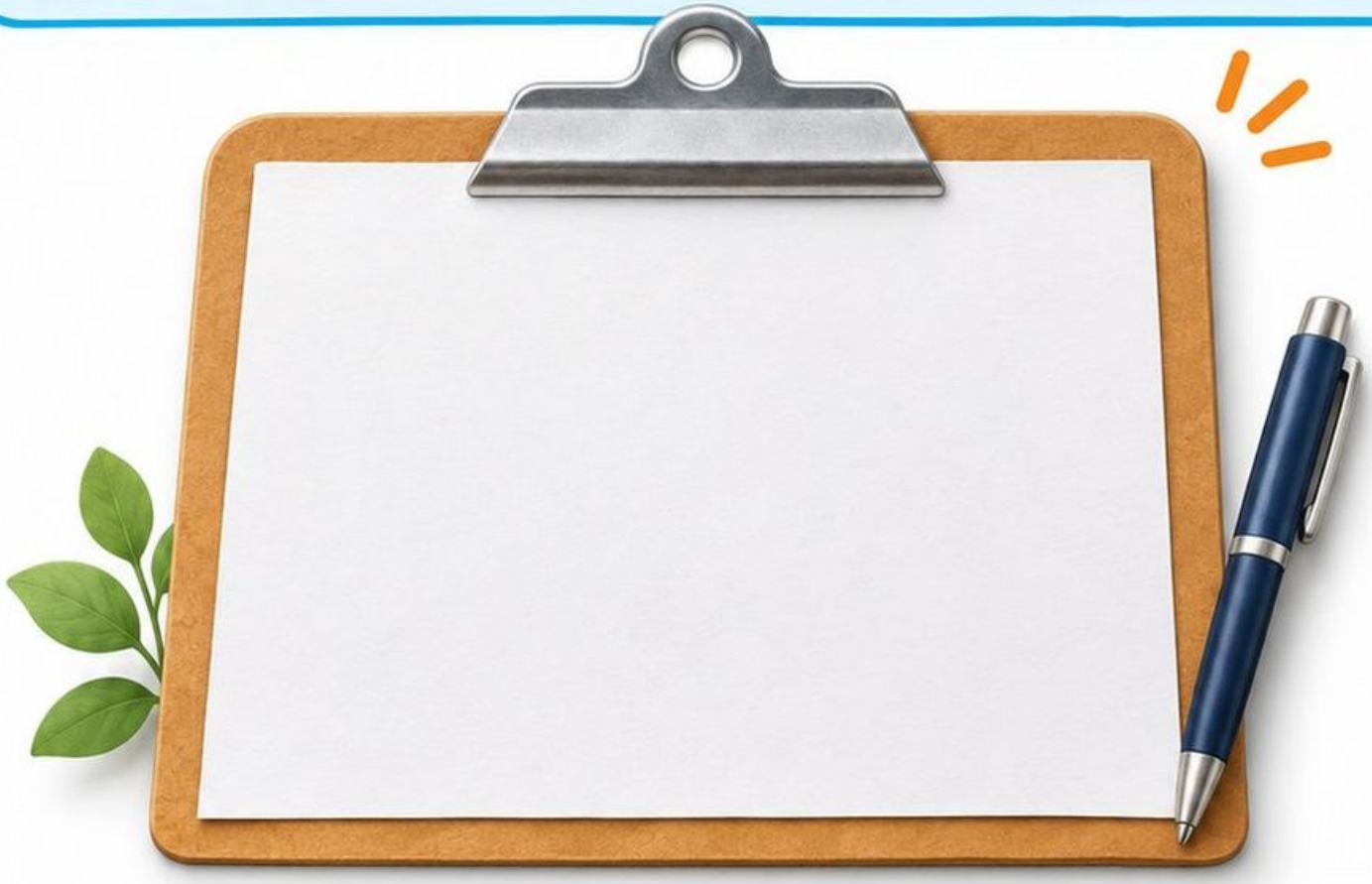


4 Odtwórz *b* dla $P=72\ \text{cm}^2$ i $a=9$ cm, mierząc model w umownej skali.



A057 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: $b=8$ cm; $9\times8=72$ cm^2.

Pytanie kontrolne: Dlaczego warunek $a\neq0$ jest niezbędny do dzielenia?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A058 • Powiększanie mozaiki

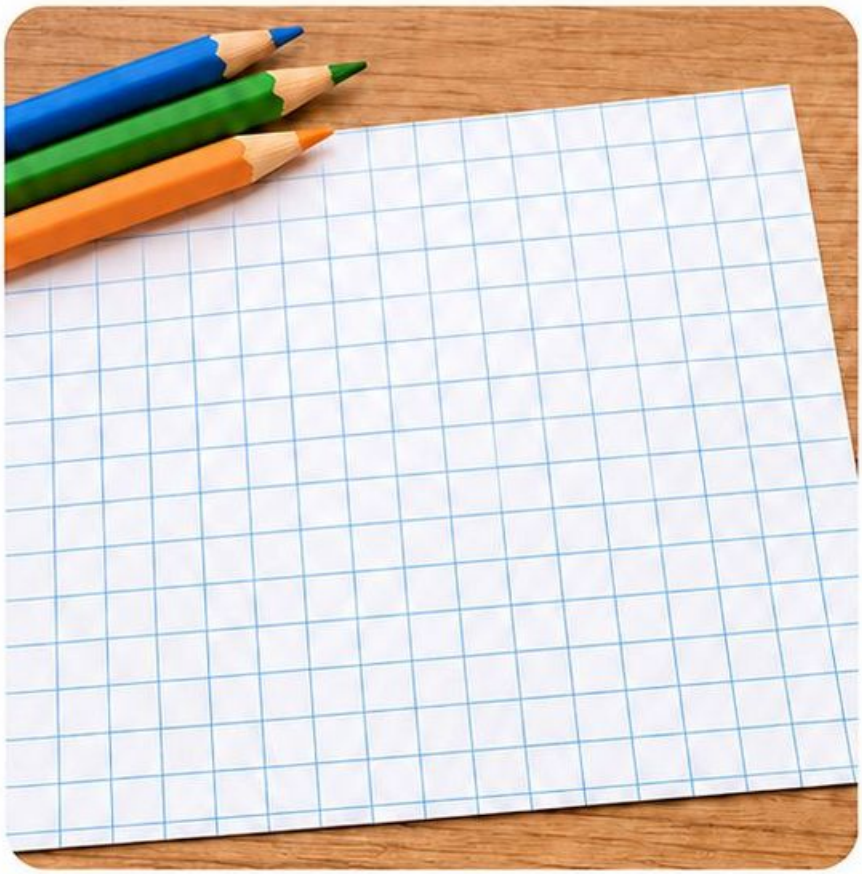
Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kratka i kredki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Narysuj prostokąt 2×3 kratki. Powiększ każdy bok 3 razy. Policz pola i obwody obu figur. Zapisz stosunki dużej do małej.



1. Narysuj prostokąt 2×3 kratki.
2. Powiększ każdy bok 3 razy.
3. Policz pola i obwody obu figur.
4. Zapisz stosunki dużej do małej.

A058 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: Pola 6 i 54; stosunek 9. Obwody 10 i 30; stosunek 3.

Pytanie kontrolne: Dlaczego pole nie rośnie tylko 3 razy?

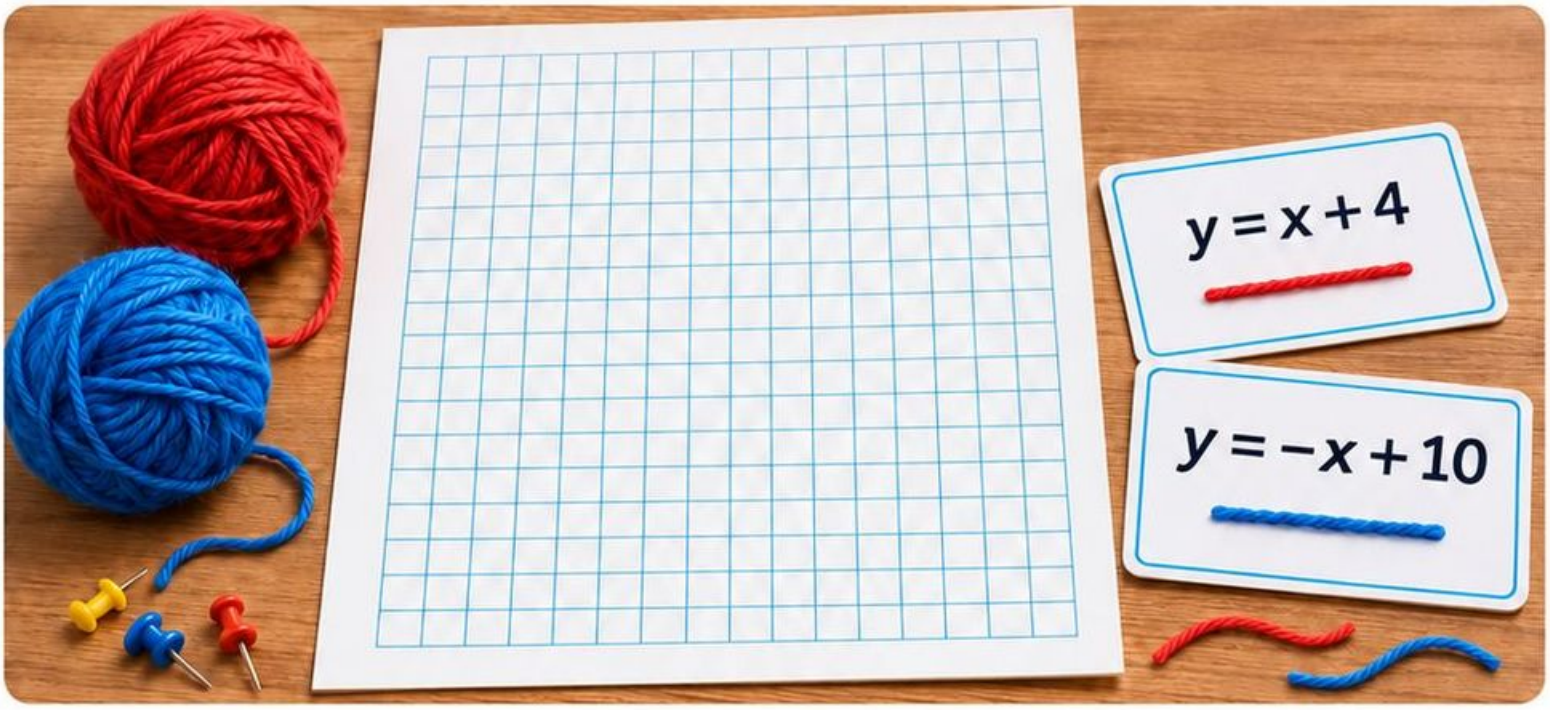
Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A059 • Spotkanie dwóch modeli

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: dwa kolory nitki, kratka i karty danych.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Zaznacz punkty prostych $y=x+4$ oraz $y=-x+10$ i ułóż nitki wzdłuż wykresów. Odczytaj przecięcie, potem rozwiąż układ i sprawdź.

1. Przewiduj, gdzie mogą przeciąć się wykresy.
2. Zaznacz na kratce punkty obu prostych i ułóż nitki wzdłuż wykresów.
3. Odczytaj współrzędne punktu przecięcia.
4. Rozwiąż układ równań i sprawdź zgodność z odczytem.

A059 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:
$x+4=-x+10;\ x=3;\ y=7.$

Pytanie kontrolne: Czy niedokładny odczyt (3; 6,9) z rysunku zmienia wynik algebraiczny?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A060 • Wykres obcięty od dołu

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papier i linijka.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1 Przewidywanie

Przez 2 minuty zastanów się, czego się spodziewasz.

2 Budowanie

Na papierze narysuj dwa wykresy słupkowe dla wartości 48 i 52: jeden z osią od 0, drugi od 46.

3 Próby

Sprawdź, jak wygląda różnica między słupkami na obu wykresach.

4 Zapis i rozmowa

Zapisz wniosek i omów go w klasie.



Dla wartości 48 i 52 narysuj dwa wykresy słupkowe: jeden z osią od 0, drugi od 46. Porównaj wrażenie różnicy. Na obu zachowaj jawną skalę.

A060 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: Różnica zawsze 4; drugi wykres wyolbrzymia wizualną proporcję wysokości. 52 jest o $8\frac{1}{3}$% większe od 48.

Pytanie kontrolne: Dlaczego ilorazu narysowanych wysokości od 46 nie wolno utożsamiać z ilorazem danych?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

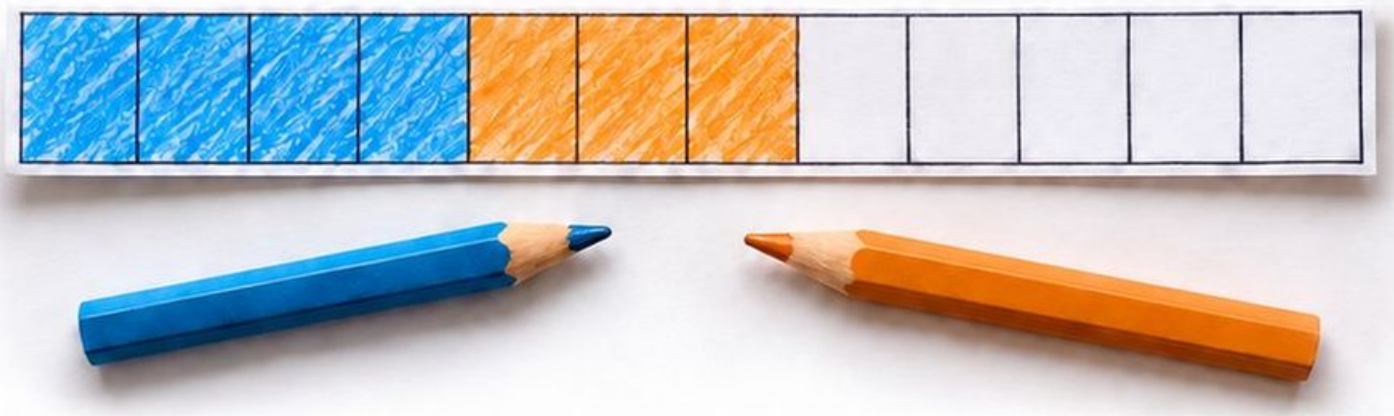
A061 • Dodawanie na wspólnym pasku

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: pasek 12 kratek i dwie kredki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1 Przewidywanie

Najpierw przewidź, czy suma przekroczy połowę.

2 Budowanie

Zaznacz 1/3 paska, a obok 1/4 tej samej całości.

3 Liczenie

Policz kratki.

4 Zapis

Zapisz rachunek.

Zaznacz 1/3 paska, a obok 1/4 tej samej całości. Najpierw przewidź, czy suma przekroczy połowę. Policz kratki i zapisz rachunek.

A061 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:
4/12+3/12=7/12>1/2.

Pytanie kontrolne:
Dlaczego nie dodajemy mianowników 3 i 4?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

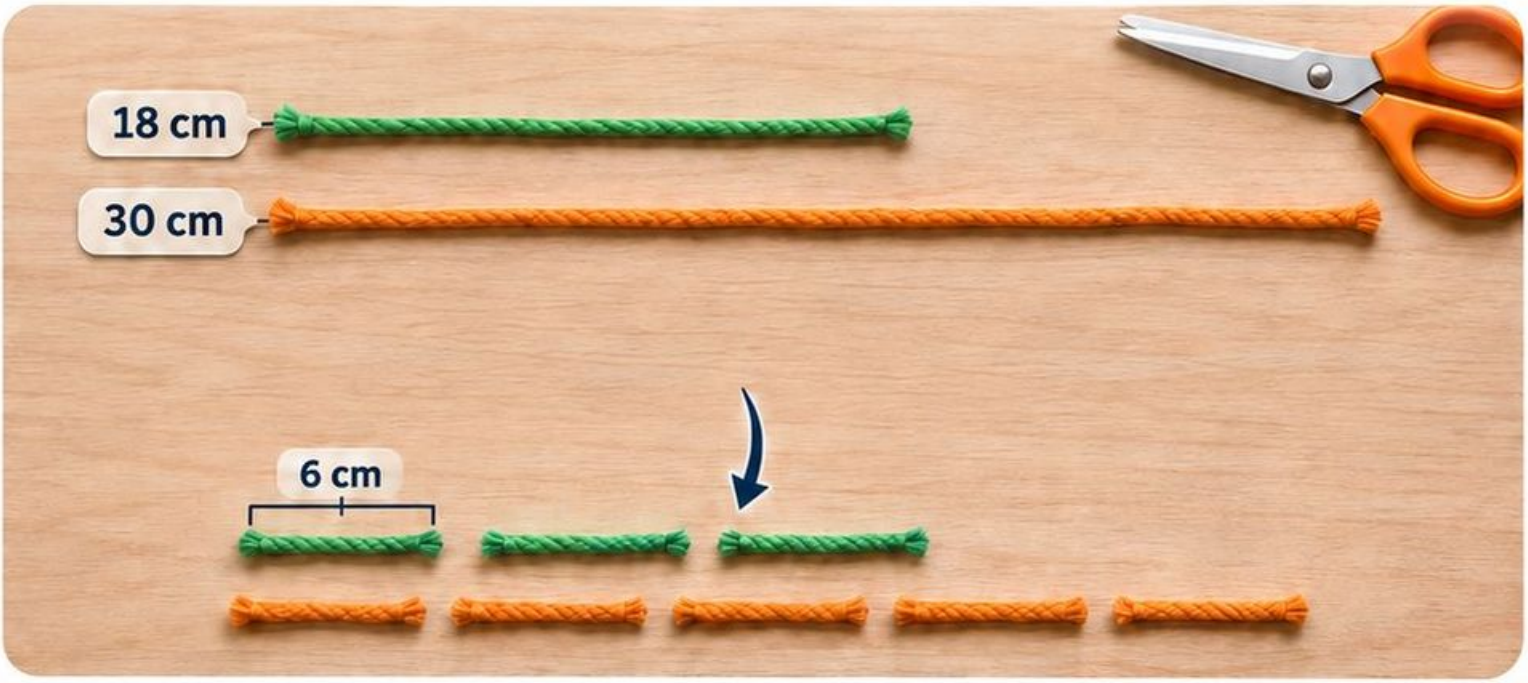
A062 • Stosunek dwóch linek

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: sznurki długości 18 i 30 cm oraz linijka.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Przewidź zależność.
2. Zbuduj modele i sprawdź.
3. Potnij modele na równe 6-centymetrowe fragmenty.
4. Zanotuj obserwacje i wniosek.

Porównaj długości, skracając stosunek. Potnij modele na równe 6-centymetrowe fragmenty. Przewidź długość dłuższej linki, gdy krótsza ma 24 cm przy tym samym stosunku.

A062 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: 18:30=3:5; dłuższa 40 cm.

Pytanie kontrolne: Co reprezentuje jedna wspólna część w obu modelach?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

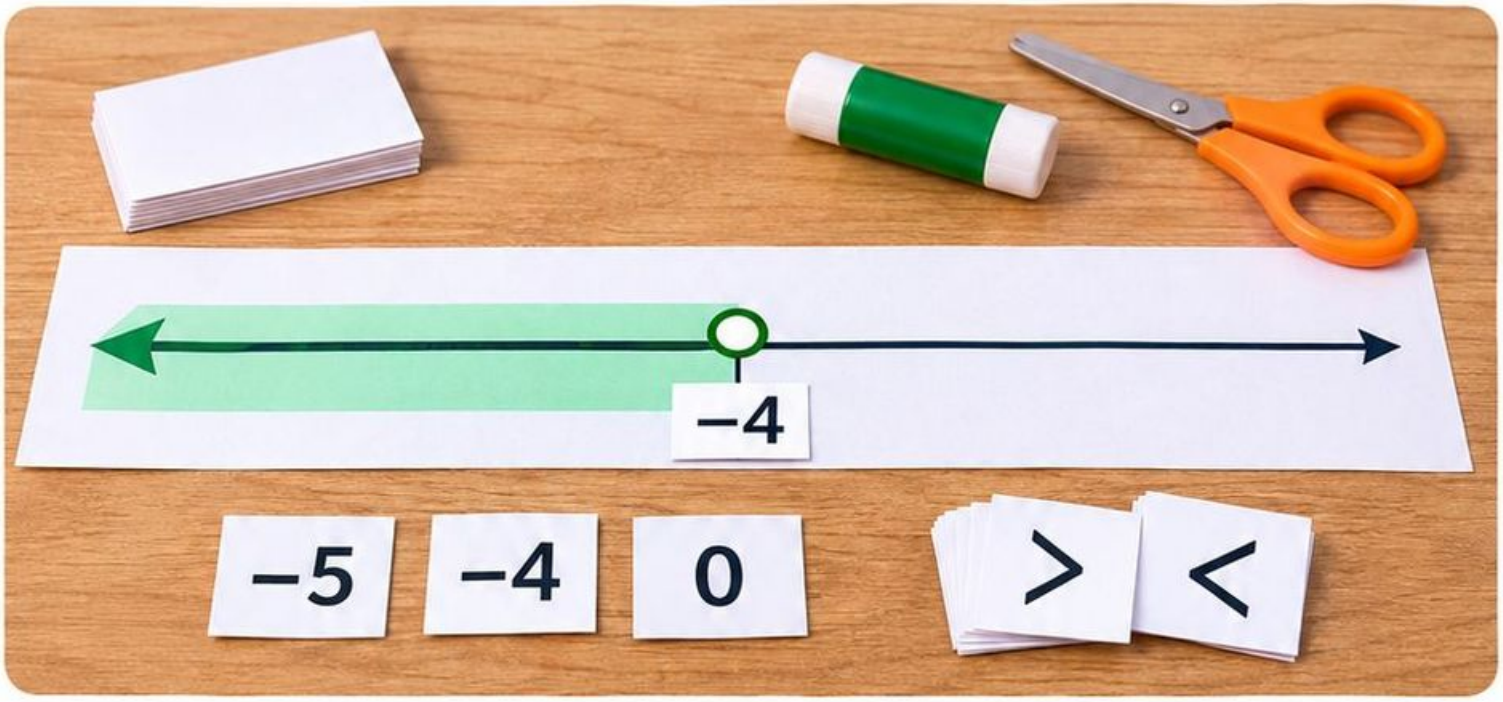
A063 • Nierówność pod granicą

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: oś papierowa, karty liczb i znaki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Ułóż model $-2x+3>11$. Rozwiąż, następnie sprawdź karty −5; −4; 0. Umieść je po właściwej stronie granicy i zaznacz jej wyłączenie.

1. **Przewidywanie:** 2 minuty.
2. **Budowanie i próby:** 10 minut.
3. **Zapis:** 5 minut.
4. **Rozmowa:** 3 minuty.

A063 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium: $x<-4$; tylko -5 spełnia spośród podanych kart.

Pytanie kontrolne: Dlaczego po dzieleniu przez -2 odwracasz znak nierówności?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A064 • Trójkąty kopiowane cyrklem

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: linijka, cyrkiel i papier.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Narysuj odcinek 6 cm. Z końców zakreśl łuki promieni 4 i 5 cm. Połącz punkt przecięcia z końcami. Zbuduj kopię po drugiej stronie podstawy i nałóż figury.



1. Narysuj odcinek 6 cm. Z końców zakreśl łuki promieni 4 i 5 cm.

2. Połącz punkt przecięcia z końcami.

3. Zbuduj kopię po drugiej stronie podstawy i nałóż figury.

A064 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: Trójkąty przystające z cechy bok–bok–bok; odbicie nie zmienia długości.

Pytanie kontrolne: Dlaczego same trzy kąty nie ustalają rozmiaru trójkąta?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

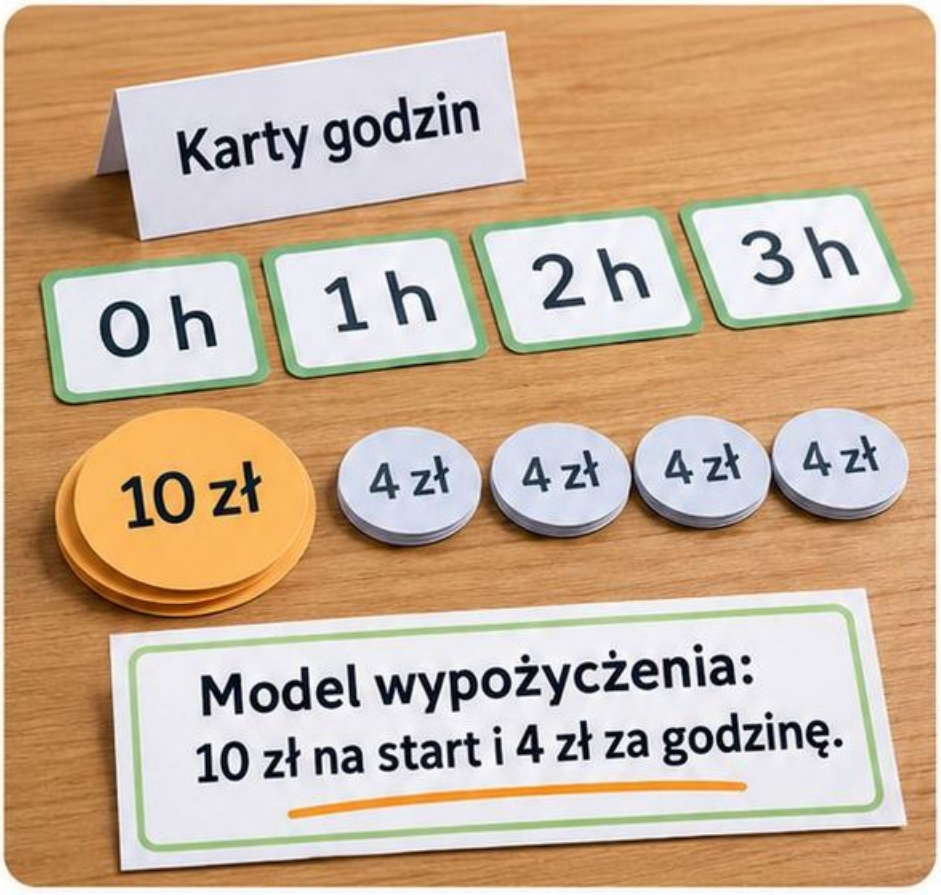
A065 • Cena z opłatą stałą

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty godzin i papierowe monety.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Przewidź, jak zależy koszt od czasu.
2. Zbuduj z kart i monet koszty dla 0; 1; 2; 3 godzin.
3. Narysuj wykres.
4. Porównaj ilorazy kosztu przez czas dla 1 i 2 godzin.

Model wypożyczenia: 10 zł na start i 4 zł za godzinę. Zbuduj koszty dla 0; 1; 2; 3 godzin. Narysuj wykres i porównaj ilorazy kosztu przez czas dla 1 i 2 godzin.

A065 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

10; 14; 18; 22 zł; $y=4x+10$; ilorazy 14 i 9 różne, więc nieproporcjonalne.

Pytanie kontrolne:

Czy model dopuszcza oddanie sprzętu bez opłaty przy zerowym czasie? Nie przy tych zasadach.

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A066 • Eksperyment z monetą

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: moneta, tabela 20 prób i ołówek.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Przed rzutami zapisz model uczciwej monety.
2. Wykonaj 20 rzutów, zaznaczając każdy wynik.
3. Oblicz częstość orła.
4. Porównaj częstość orła z 1/2.

Przed rzutami zapisz model uczciwej monety. Wykonaj 20 rzutów, zaznaczając każdy wynik. Oblicz częstość orła i porównaj z 1/2.

A066 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

Częstość zależy od próby; np 11 orłów daje 11/20=0,55. Prawdopodobieństwo modelowe 1/2 nie wymusza 10 orłów.

Pytanie kontrolne:

Czy różnica w 20 próbach dowodzi nieuczciwości monety? Nie.





Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A067 • Część części złożonego papieru

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: prostokąt papieru i kredki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

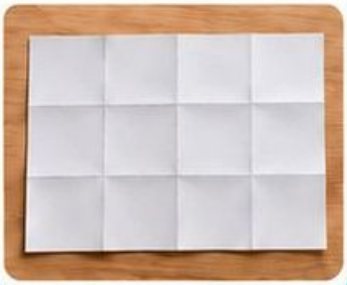
Złóż prostokąt na 3 równe pasy, a potem na 4 części w drugim kierunku. Zaznacz 2/3 w jednym kierunku i 1/4 w drugim. Policz część wspólną.



1. Złóż prostokąt na 3 równe pasy.



2. Złóż na 4 części w drugim kierunku.



3. Zaznacz 2/3 w jednym kierunku.



4. Zaznacz 1/4 w drugim kierunku.



A067 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

2 z 12 pól;

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Pytanie kontrolne:

Dlaczego wynik opisuje część pierwotnej całości, a nie tylko zaznaczonego pasa?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A068 • Stała cena na wadze modelowej

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty mas 0,5; 1; 1,5; 2 kg i żetony zł.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1 Przewidywanie

Określ, jak przyporządkujesz kwoty do mas.

2 Budowanie

Ustaw na wadze wybraną masę i odpowiadającą jej kwotę z żetonów.

3 Próby

Powtórz dla wszystkich mas: 0,5; 1; 1,5; 2 kg.

4 Zapis

Zbuduj tabelę i oblicz stały iloraz.

Towar kosztuje 12 zł/kg. Dopasuj do mas kwoty 6; 12; 18; 24 zł. Zbuduj tabelę i oblicz stały iloraz. Dodaj pytanie o 2,75 kg.

A068 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

Koszt/masa=12 zł/kg; 2,75 kg kosztuje 33 zł.

Pytanie kontrolne:

Jak warunek braku opłaty stałej wpływa na proporcjonalność?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A069 • Dwa kolory niewiadomych

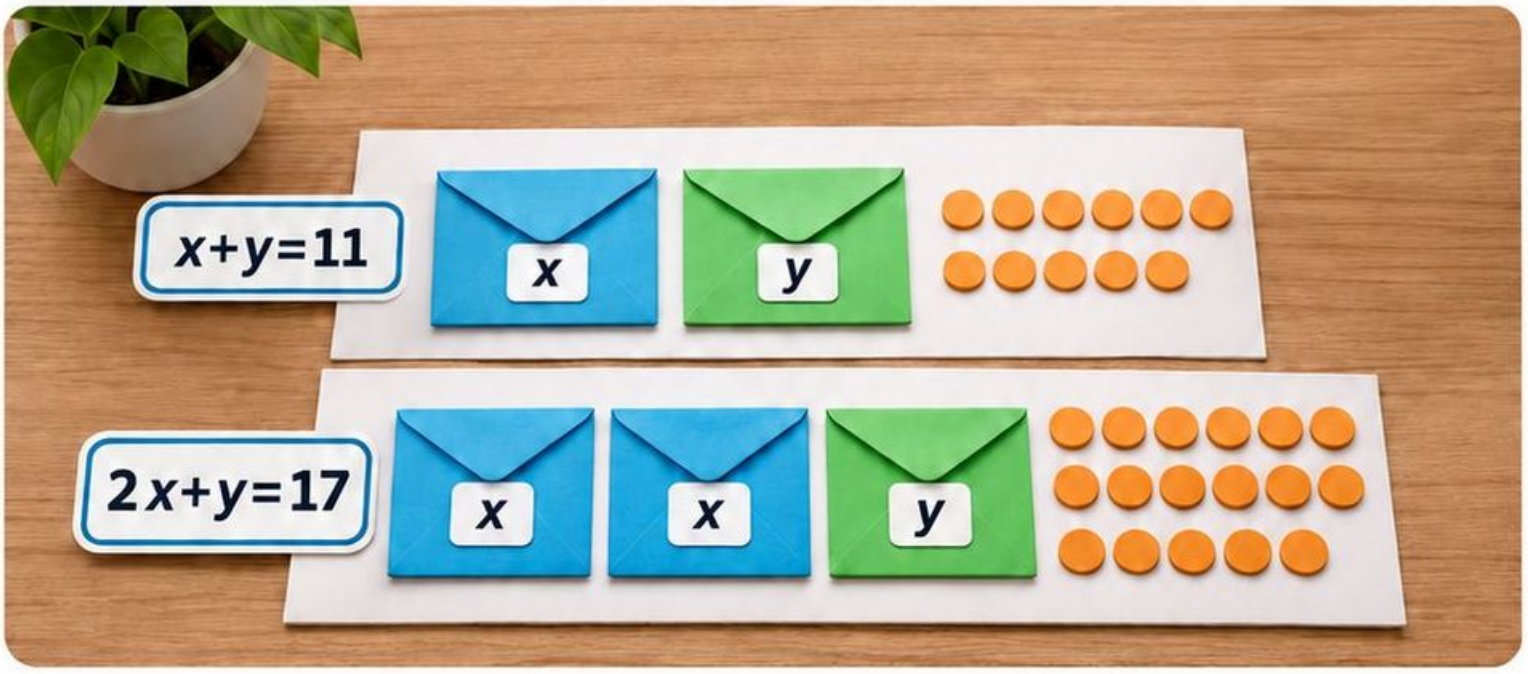
Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: koperty dwóch kolorów i 32 żetony.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Zbuduj model $x+y=11$ oraz $2x+y=17$. Z porównania obu układów usuń wspólne elementy. Oblicz wartości kopert i sprawdź.



1. Zbuduj model $x+y=11$.
2. Zbuduj model $2x+y=17$.
3. Z porównania obu układów usuń wspólne elementy.
4. Oblicz wartości kopert i sprawdź.

A069 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model – gotowe rozwiązanie



Rozwiązanie

Rozwiązanie lub kryterium:

$x=6;\ y=5;\ 6+5=11$ i $12+5=17$.

Wniosek

Zatem $x=6$ i $y=5$ spełniają oba równania.

Pytanie kontrolne:
Dlaczego odejmowanie równań usuwa tę samą niewiadomą?



Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

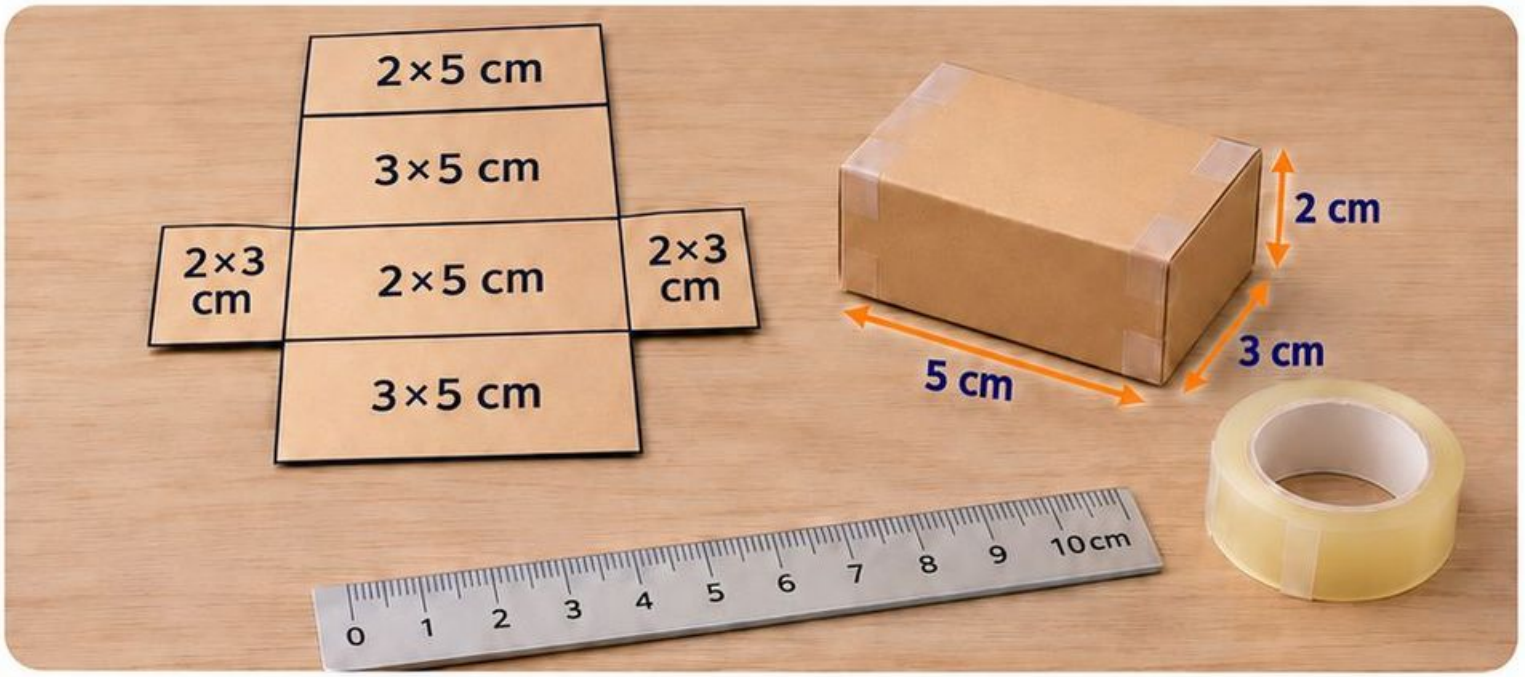
A070 • Siatka pudełka

Klasy 4–6 • 20 minut

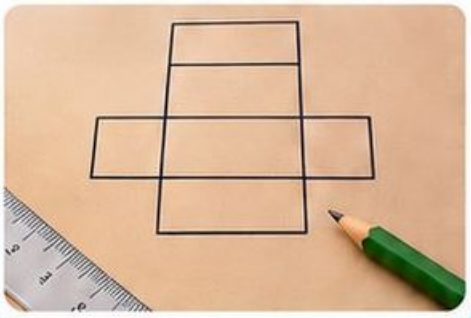
Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: tektura, linijka i taśma.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1 Narysuj siatkę 2×3×5 cm.



2 Wytnij i podpisz wszystkie ściany.



3 Sklej siatkę w prostopadłościan.



Narysuj i wytnij siatkę prostopadłościanu 2×3×5 cm. Przed sklejeniem podpisz wszystkie ściany. Dobierz pary przystające i policz krawędzie bryły.

A070 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pelnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:
Po dwie ściany 2×3; 2×5; 3×5; 12 krawędzi i 8 wierzchołków.

Pytanie kontrolne:
Dlaczego wspólna krawędź dwóch ścian nie jest dwiema krawędziami bryły?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A071 • Parabola z punktowych kart

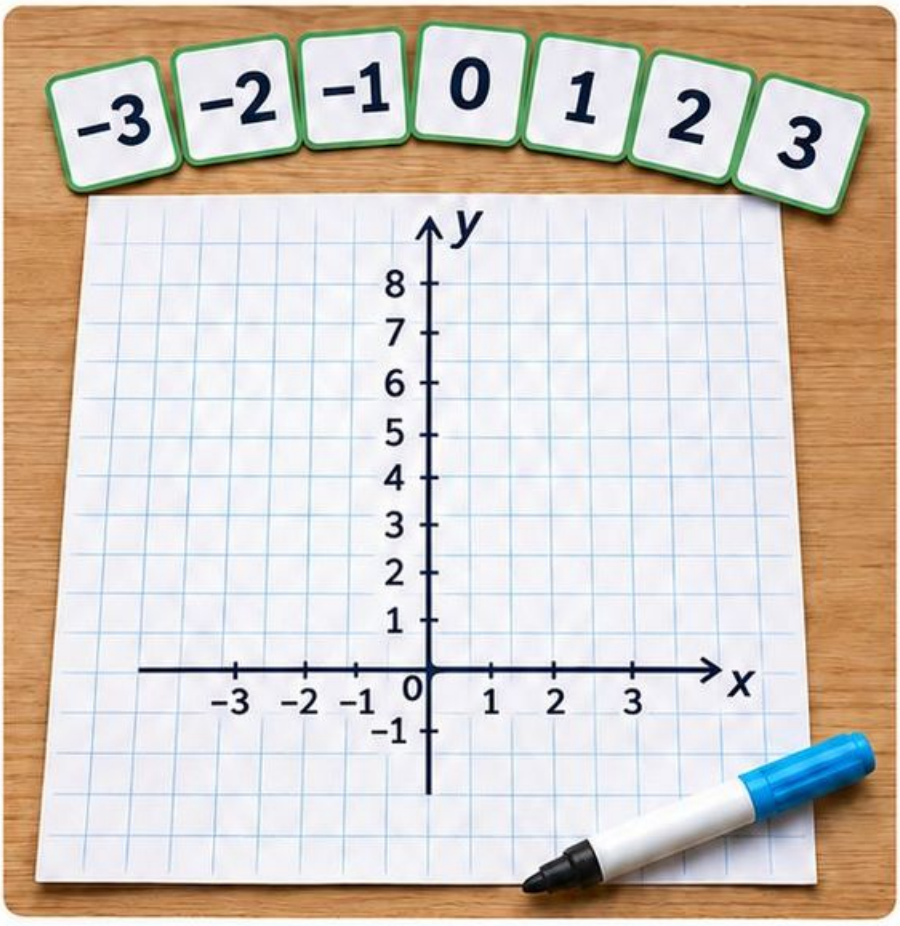
Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kratka, karty −3 do 3 i marker.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Dla $y=x^2-1$ oblicz wartości. Zaznacz 7 punktów, opisując osie. Sprawdź symetrię par x i −x. Rysunek krzywej traktuj jako model funkcji, nie połączenie odcinkami.



1. **Przewidywanie**
   2 minuty.
2. **Budowanie i próby**
   10 minut.
3. **Zapis**
   5 minut.
4. **Rozmowa**
   3 minuty.

A071 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

8; 3; 0; −1; 0; 3; 8; wierzchołek (0; −1), zera −1 i 1.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego poza podanymi kartami funkcja nadal ma określone wartości?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A072 • Przestrzeń dwóch losowań

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: dwa woreczki, karty A, B i 1; 2; 3.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1 Przewiduj wniosek.

2 Zbuduj wszystkie pary na stole.

3 Wykonaj próby losowania.

4 Zapisz obserwacje.

W pierwszym woreczku umieść A, B, w drugim 1; 2; 3. Zbuduj wszystkie pary na stole. Zakładając równomierne niezależne losowania, oblicz szansę pary B 2.

A072 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: 6 par; $P(B\ 2) = \frac{1}{6}$.

Pytanie kontrolne: Czy można policzyć wyniki, dodając 2+3, zamiast mnożyć 2×3?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

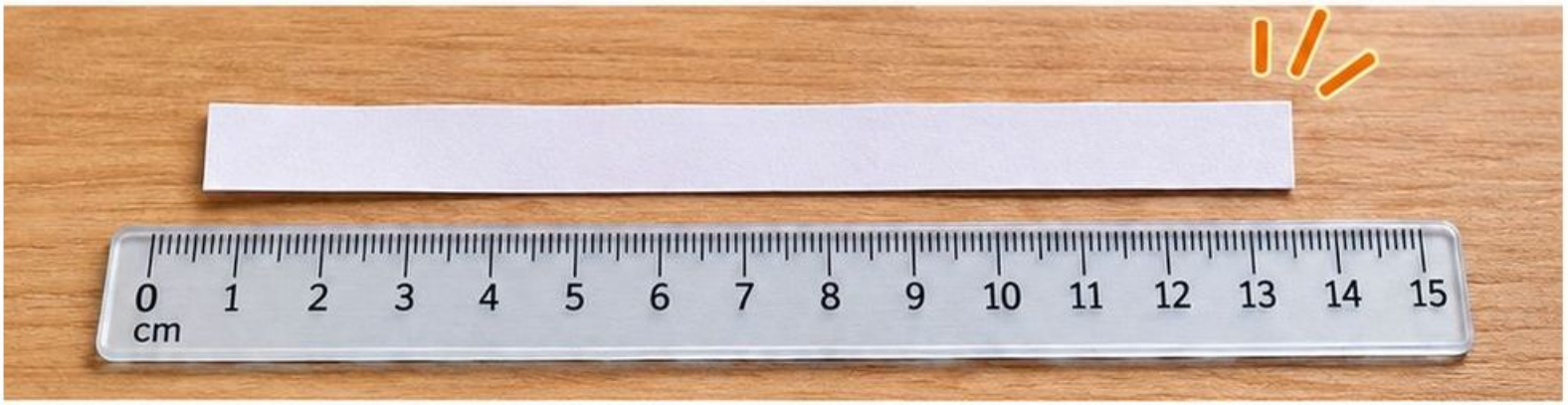
A073 • Pomiar i zaokrąglenie

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: pasek długości około 14 cm i linijka.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Zmierz pasek do 1 mm. Zapisz długość w cm, a następnie zaokrąglij do całych cm. Dla modelowego wyniku 13,7 cm zaznacz miejsce na osi.

1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)



A073 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

13,7 cm = 137 mm; po zaokrągleniu 14 cm. Rzeczywisty pomiar zależy od paska.

Pytanie kontrolne:

Jakie wyniki do 0,1 cm zaokrąglają się do 14 cm?
13,5–14,4 cm.

Dla nauczyciela:

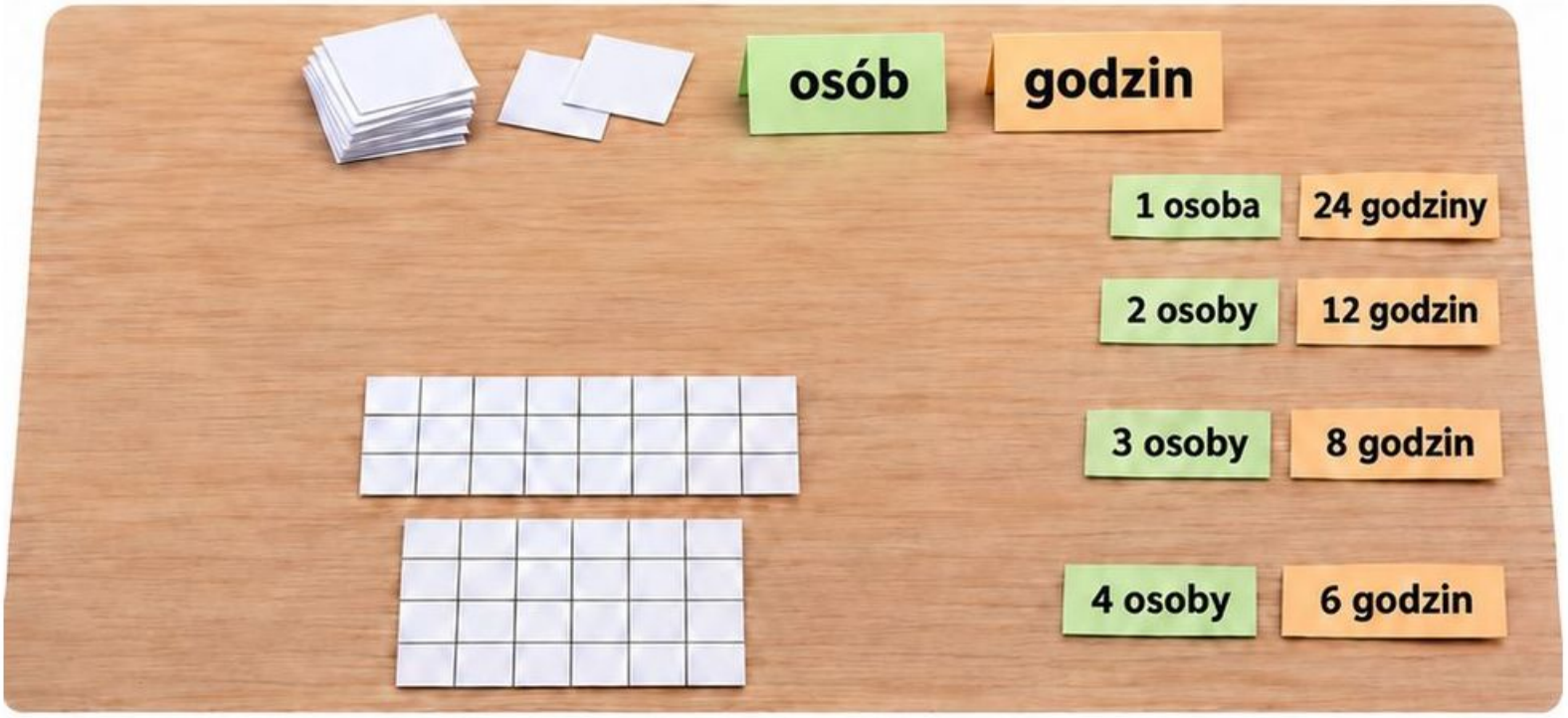
sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A074 • Prostokąt stałej pracy

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 24 kwadraty papierowe i etykiety osób/godzin.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Układaj prostokąty 1×24; 2×12; 3×8; 4×6. Odczytuj modele liczby pracowników i czasu przy jednakowej wydajności, podzielnych zadaniach i braku ograniczeń sprzętu.

1. **Przewidywanie** 2 minuty
2. **Budowanie i próby** 10 minut
3. **Zapis** 5 minut
4. **Rozmowa** 3 minuty

A074 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: Iloczyn 24 roboczogodziny stały. Podwojenie liczby osób zmniejsza czas o połowę w tym modelu.

Pytanie kontrolne: Dlaczego model nie gwarantuje takiego wyniku przy jednym wspólnym narzędziu?

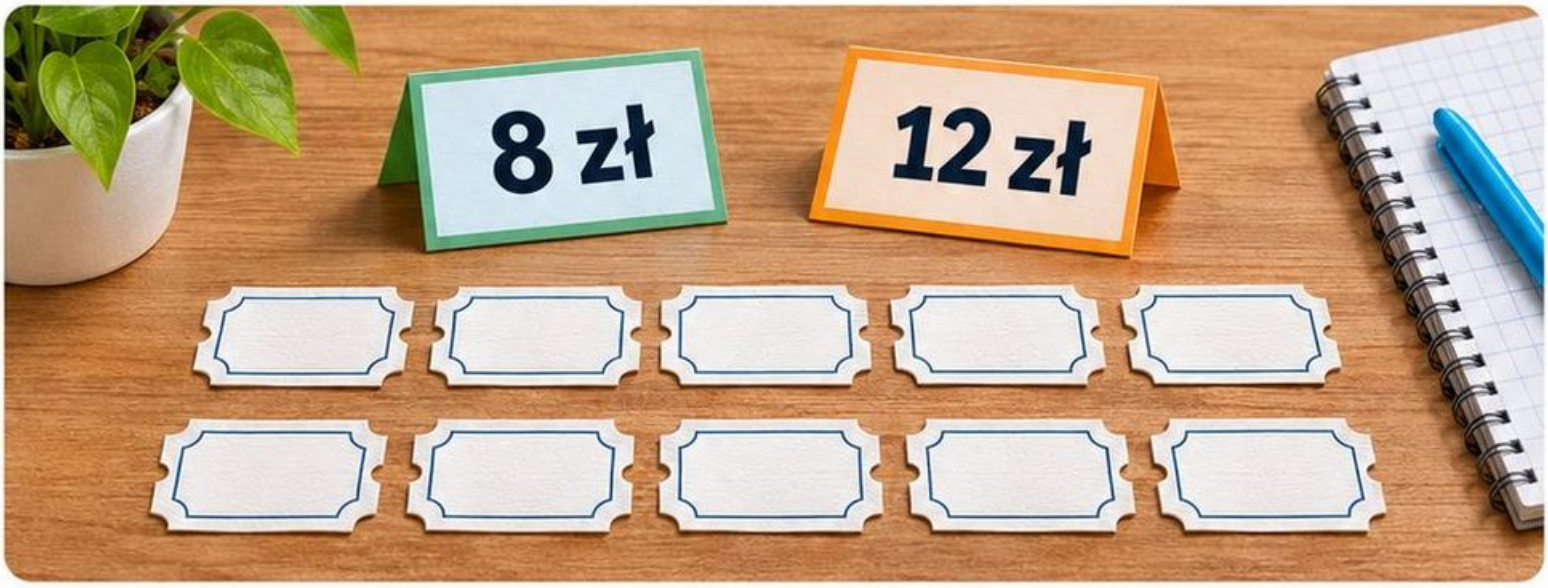
Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A075 • Kasa dwóch cen

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 10 papierowych biletów i etykiety 8 zł, 12 zł.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1. **Przewidywanie** (2 minuty)



2. **Budowanie i próby** (10 minut)



3. **Zapis** (5 minut)



4. **Rozmowa** (3 minuty)



Ułóż 10 biletów o łącznej cenie 104 zł, przypisując każdemu jedną z dwóch cen. Zapisz układ i sprawdź rozwiązanie manipulowaniem kartami.

A075 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:
$x+y=10$; $8x+12y=104$; $x=4$ tańsze, $y=6$ droższych.

Pytanie kontrolne:
Czy łączna cena 105 zł jest możliwa przy tych samych warunkach? Nie.

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

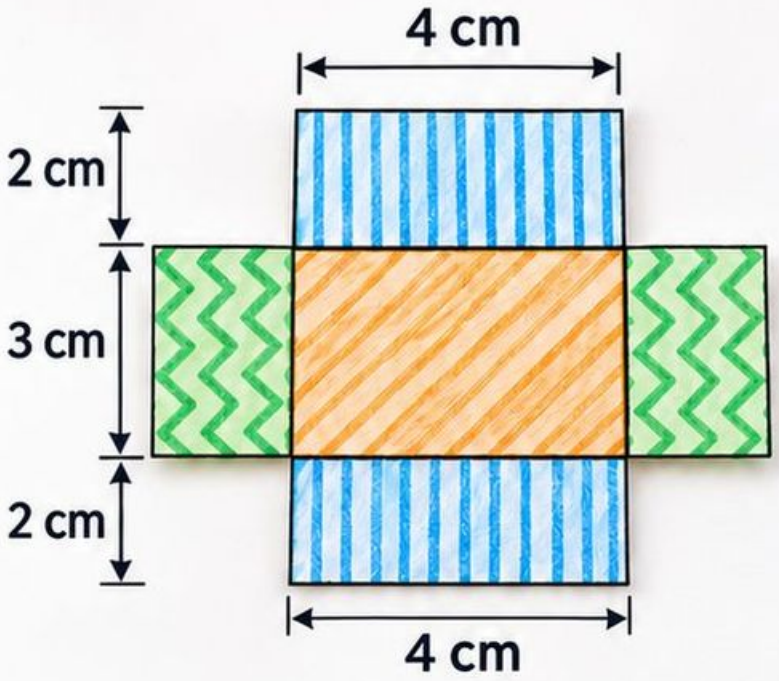
A076 • Opakowanie bez pokrywki

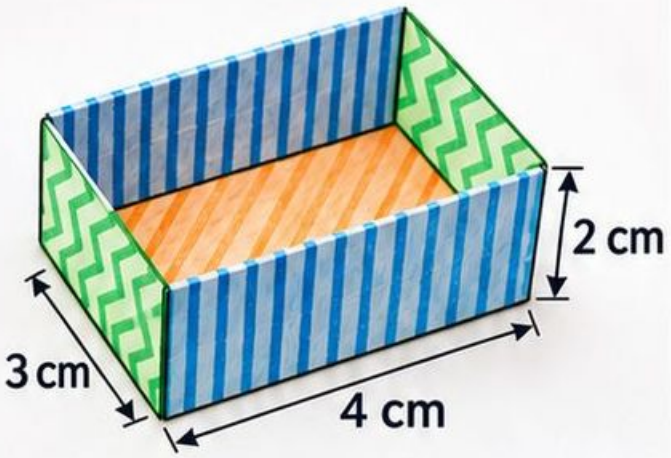
Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: siatka pudełka 3×4×2 cm i kredki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.







Zaznacz dno oraz cztery ściany boczne różnymi wzorami. Oblicz materiał na pudełko bez pokrywki, bez zakładek. Porównaj z pudełkiem zamkniętym.

A076 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: Dno 12 cm²; ściany 12+16=28 cm²; bez pokrywki 40 cm², zamknięte 52 cm².

Pytanie kontrolne: Dlaczego nie wolno od razu zastosować wzoru na całą powierzchnię?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A077 • Wierzchołek przez składanie wykresu

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: wykres $y=(x-2)^2+3$ i kartka.

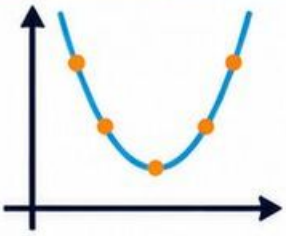
Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



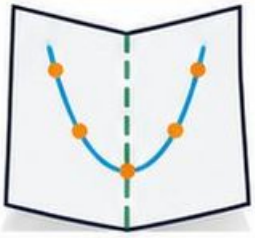
1 Przewidywanie



2 Budowanie



3 Próby



4 Zapis

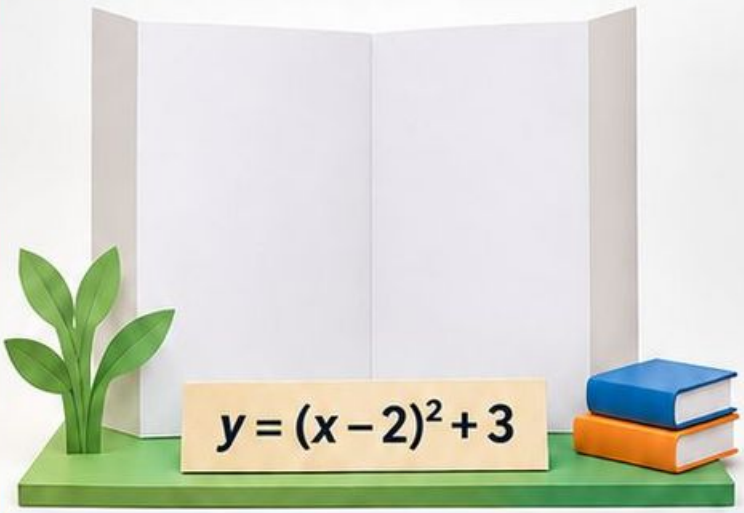


Zaznacz punkty dla $x=0; 1; 2; 3; 4$. Złóż kartkę wzdłuż $x=2$, porównując symetryczne punkty. Wyprowadź najmniejszą wartość z nieujemności kwadratu.

A077 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

1 Model fizyczny



2 Dane

x	0	1	2	3	4
y	7	4	3	4	7

3 Rozwiązanie lub kryterium

Wartości 7; 4; 3; 4; 7; minimum 3 przy x=2.

4 Pytanie kontrolne

Dlaczego sama obecność najniższego punktu w tabeli nie zastępuje argumentu dla wszystkich x?

5 Wniosek

Wartość najmniejsza wynosi 3 i jest osiągana przy x=2.

6 Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A078 • Losowanie kolorów

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 5 jednakowych nakrętek: czerwone 2, białe 3 oraz woreczek.





Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1 Przewidywanie



2 Budowanie



3 Próby



4 Zapis



Wymieszaj i losuj jedną nakrętkę, zwracając ją przed kolejną próbą. Najpierw oblicz szanse, po 20 próbach porównaj częstości. Zakładaj jednakową szansę każdej nakrętki.

A078 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model (ukończony)



Dane

- 2 czerwone nakrętki
- 3 białe nakrętki
- razem 5 nakrętek

Działanie

$P(\text{czerwonej}) = \frac{2}{5}$;

$P(\text{białej}) = \frac{3}{5}$.

Wniosek

Rozwiązanie lub kryterium: $P(\text{czerwonej}) = \frac{2}{5}$; $P(\text{białej}) = \frac{3}{5}$. Częstości prób mogą być inne.

Pytanie kontrolne

Pytanie kontrolne:
Co zmieni brak zwracania nakrętki między próbami?

Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A079 • Dziesiętny targ

Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: etykiety 2,40 zł; 3,75 zł; 0,85 zł i papierowe monety.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1. **Przewidywanie:** 2 minuty.
2. **Budowanie i próby:** 10 minut.
3. **Zapis:** 5 minut.
4. **Rozmowa:** 3 minuty.

Kup po 2 sztuki pierwszych dwóch produktów i 1 trzeci. Zapisz działanie, a następnie ułóż resztę z 20 zł. Porównaj z wcześniejszym oszacowaniem.

A079 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Dane

- 2 × 2,40 zł
- 2 × 3,75 zł
- 0,85 zł
- 20,00 zł

Model



Działanie

$2 \times 2{,}40 + 2 \times 3{,}75 + 0{,}85 = 13{,}15$ zł; reszta 6,85 zł.

Wniosek

Koszt zakupów wynosi 13,15 zł, a reszta to 6,85 zł.

Pytanie kontrolne

Pytanie kontrolne: Jak sprawdzisz resztę przez dodanie jej do kosztu?

Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

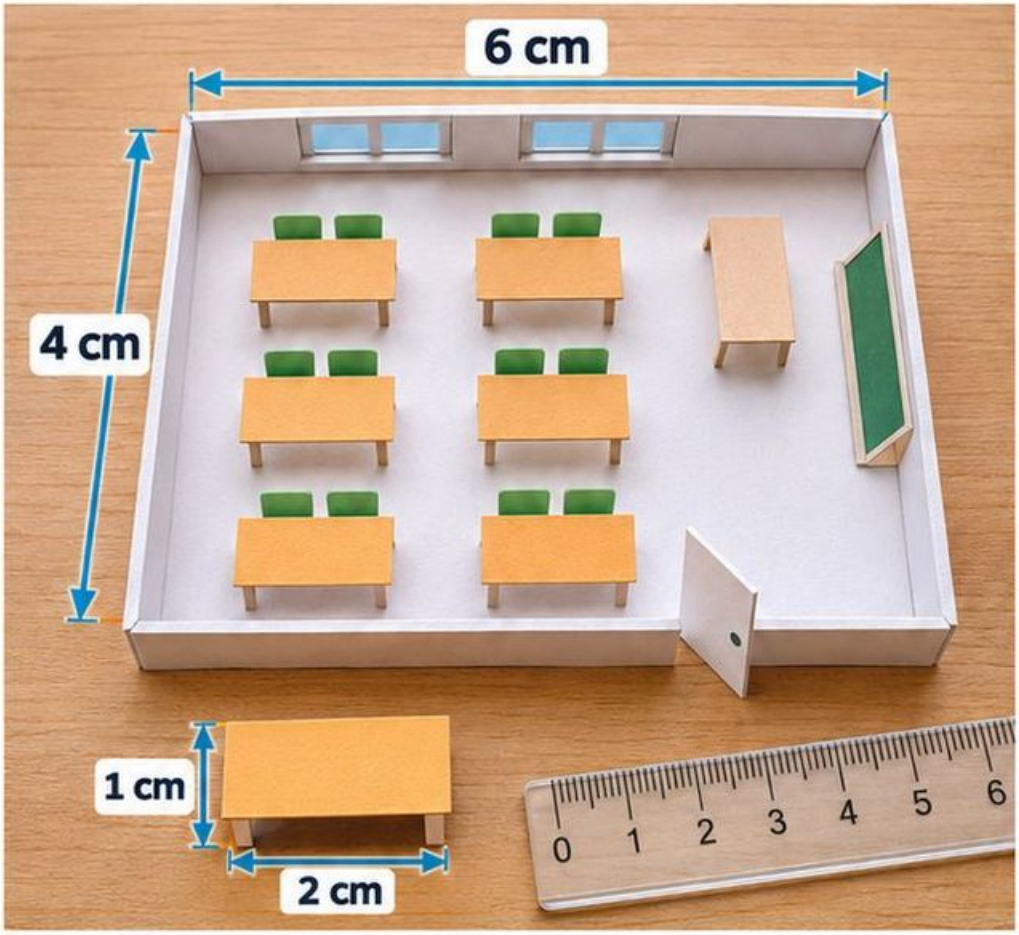
A080 • Plan klasy w skali

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: prostokąt 6×4 cm, linijka i papierowe meble.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



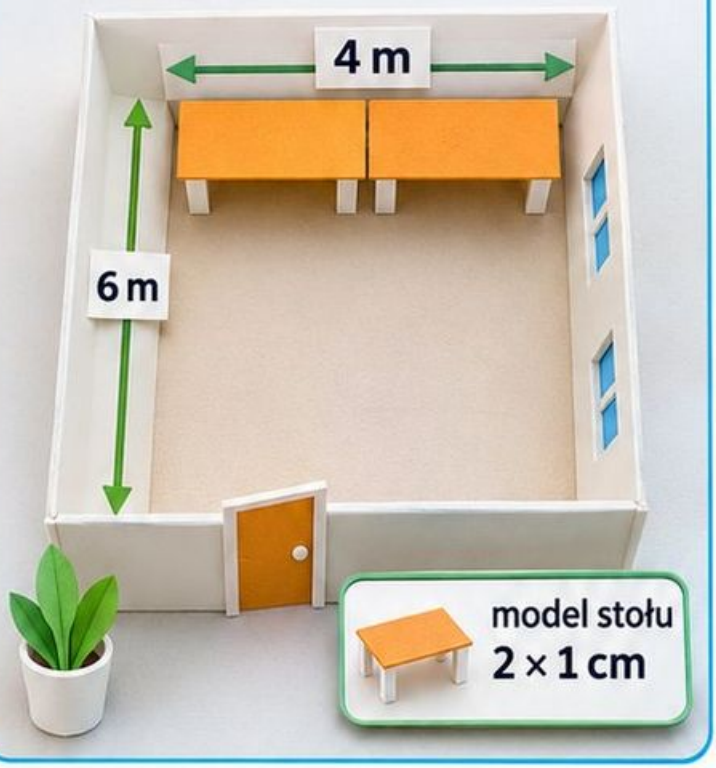
1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)

Model sali ma skalę 1:100. Ustal rzeczywiste wymiary. Wytnij model stołu 2×1 m w tej samej skali i sprawdź, czy mieści się wzdłuż krótszej ściany.

A080 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model



Dane i działanie

Dane:
Sala 6 × 4 m;
model stołu 2 × 1 cm.

Działanie:

Wniosek

Przy ścianie 4 m mieszczą się dwa stoły obok siebie bez przerw.

Pytanie kontrolne

Jak zmieniłby się model stołu w skali 1:50?

Rozwiązanie lub kryterium

Sala 6 × 4 m;
model stołu 2 × 1 cm.
Przy ścianie 4 m mieszczą się dwa stoły obok siebie bez przerw.

Dla nauczyciela

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A081 • Pierwiastki z prostokąta

Liceum i technikum • 20 minut

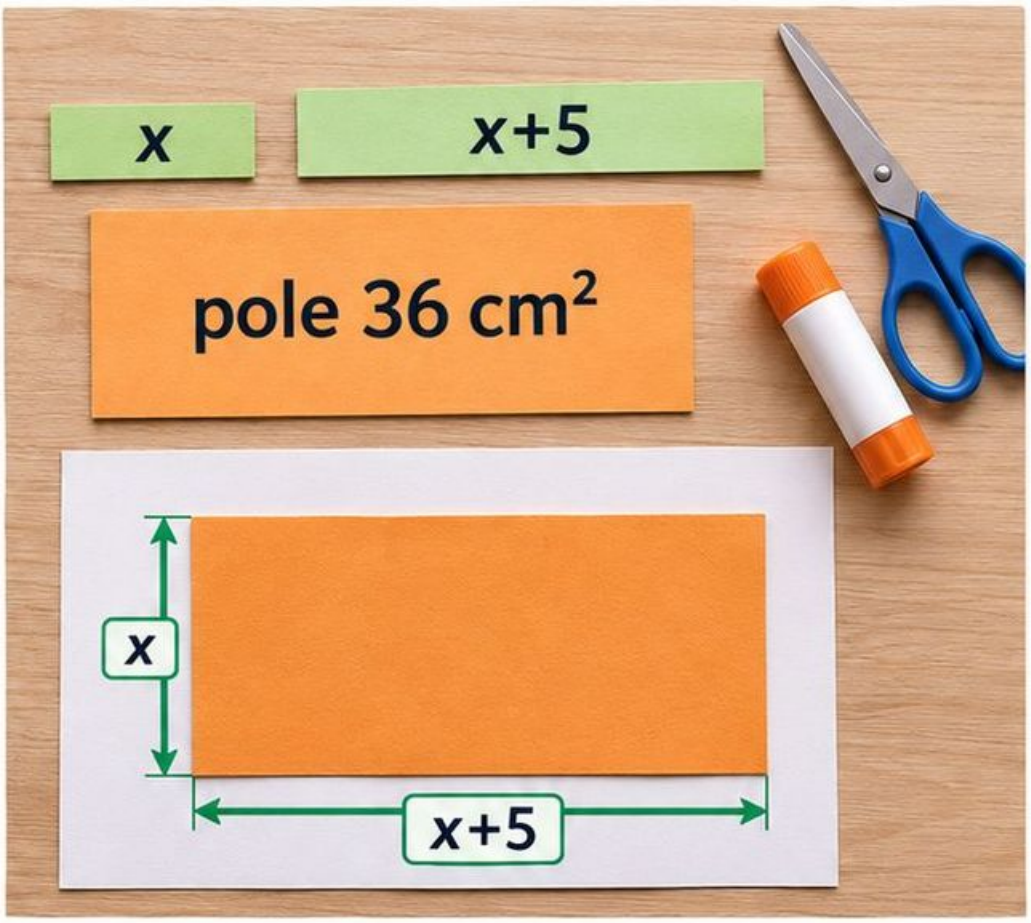
Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kartoniki boków i pole 36 cm².

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Szukaj prostokąta o bokach x i $x+5$, pola 36. Zbuduj równanie, zapisz oba rozwiązania i wybierz dopuszczalne. Narysuj model w rzeczywistych wymiarach.

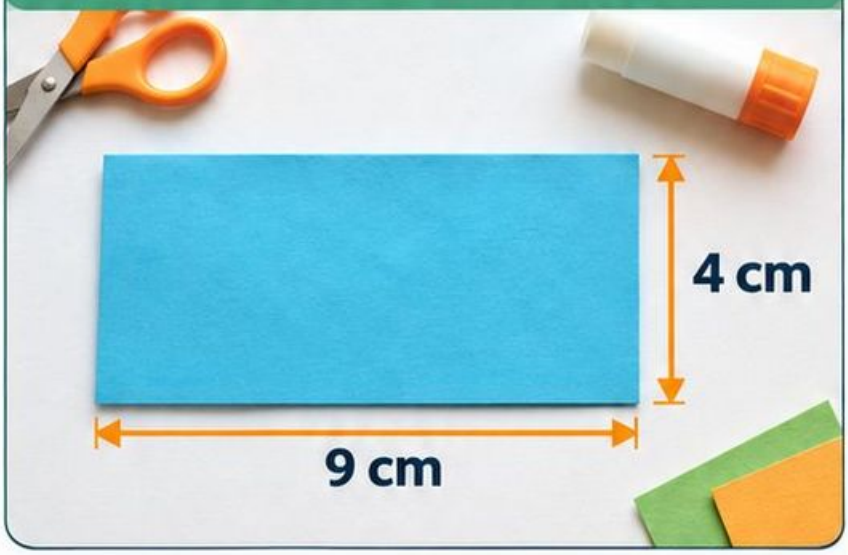
1. Przewiduj, jakie wartości może mieć x.
2. Zbuduj model z kartoników boków i pola 36 cm².
3. Wypróbuj dopuszczalne wymiary.
4. Zapisz wnioski i uzasadnij wybór.



A081 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model – gotowa realizacja



Dane

- Równanie: $x^2+5x-36=0$.
- Model: prostokąt.
- Szukane: długości boków prostokąta.

Działanie

$$x^2+5x-36=0;$$
$$(x+9)(x-4)=0;$$
$$x=4.$$

Wniosek

Boki prostokąta mają długości 4 i 9 cm, a pierwiastek -9 został odrzucony.

Pytanie kontrolne

Dlaczego poprawny pierwiastek równania może być niedopuszczalną długością?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A082 • Warstwy objętości

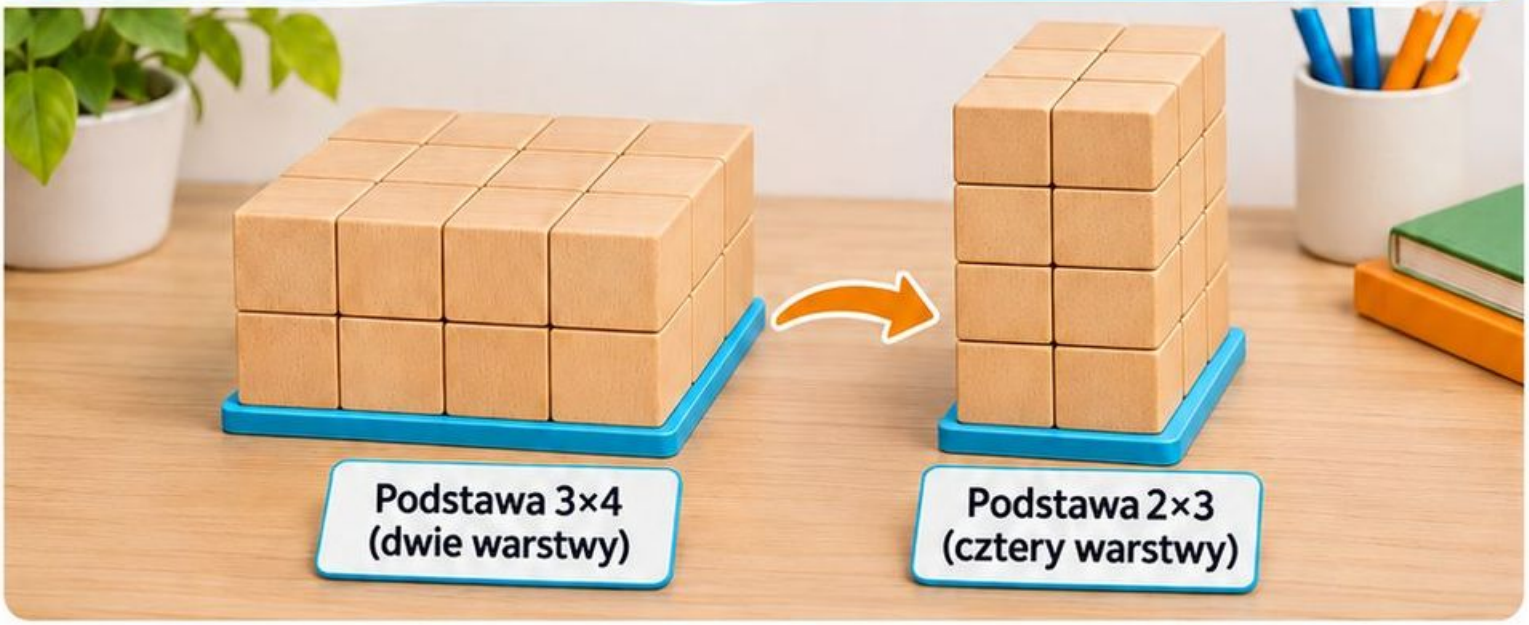
Klasy 4–6 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 24 jednakowe klocki i podkładka 3×4.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Ułóż dwie warstwy po 12 klocków. Zapisz liczbę w warstwie, wysokość i objętość w jednostkach. Przebuduj na podstawę 2×3.



1. **Przewidywanie:** 2 minuty.
2. **Budowanie i próby:** 10 minut.
3. **Zapis:** 5 minut.
4. **Rozmowa:** 3 minuty.

A082 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: 3×4×2=24; drugi model 2×3×4=24.

Pytanie kontrolne: Dlaczego inna wysokość nie musi oznaczać większej objętości?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

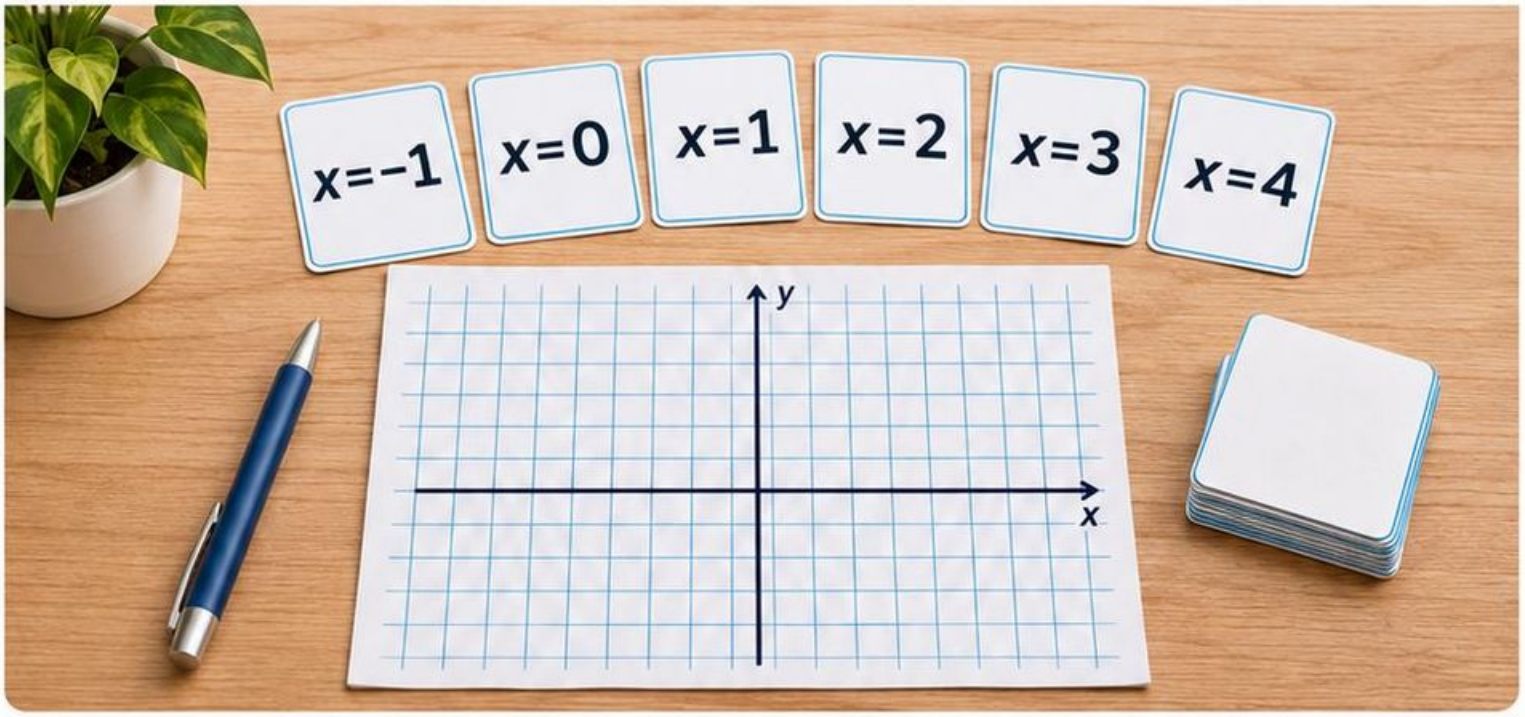
A083 • Zera z przecięcia osi

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty $x=-1; 0; 1; 2; 3; 4$ i kratka.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Oblicz $y=(x-1)(x-3)$. Zaznacz wyniki. Wyznacz zera przez czynniki, a następnie sprawdź ich miejsca na rysunku.

1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)

A083 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: Zera 1 i 3; wartości 8; 3; 0; –1; 0; 3.

Pytanie kontrolne: Dlaczego w równaniu iloczynu równego zeru wystarczy wyzerować jeden czynnik?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A084 • Suma rozłącznych możliwości

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: 3 karty trójkątów i 2 karty kwadratów.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Losuj jedną z 5 równoprawdopodobnych kart. Zapisz zdarzenie „trójkąt lub kwadrat” i osobne szanse kategorii. Potem dodaj 1 kartę koła i oblicz ponownie.

1. Przewidź wyniki.



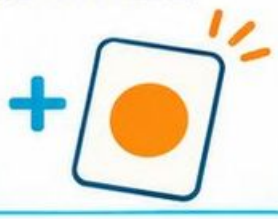
2. Zbuduj model z 5 kart i wykonaj próby losowania.



3. Zapisz zdarzenie „trójkąt lub kwadrat” i osobne szanse kategorii.



4. Dodaj 1 kartę koła i oblicz ponownie.



A084 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

$P(\text{trójkąta}) = \frac{3}{5}$; $P(\text{kwadratu}) = \frac{2}{5}$; suma 1. Po dodaniu koła: $P(\text{trójkąta}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(\text{kwadratu}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; suma $\frac{5}{6}$.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego dodawanie tych szans jest uprawnione? Kategorie się nie nakładają.

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

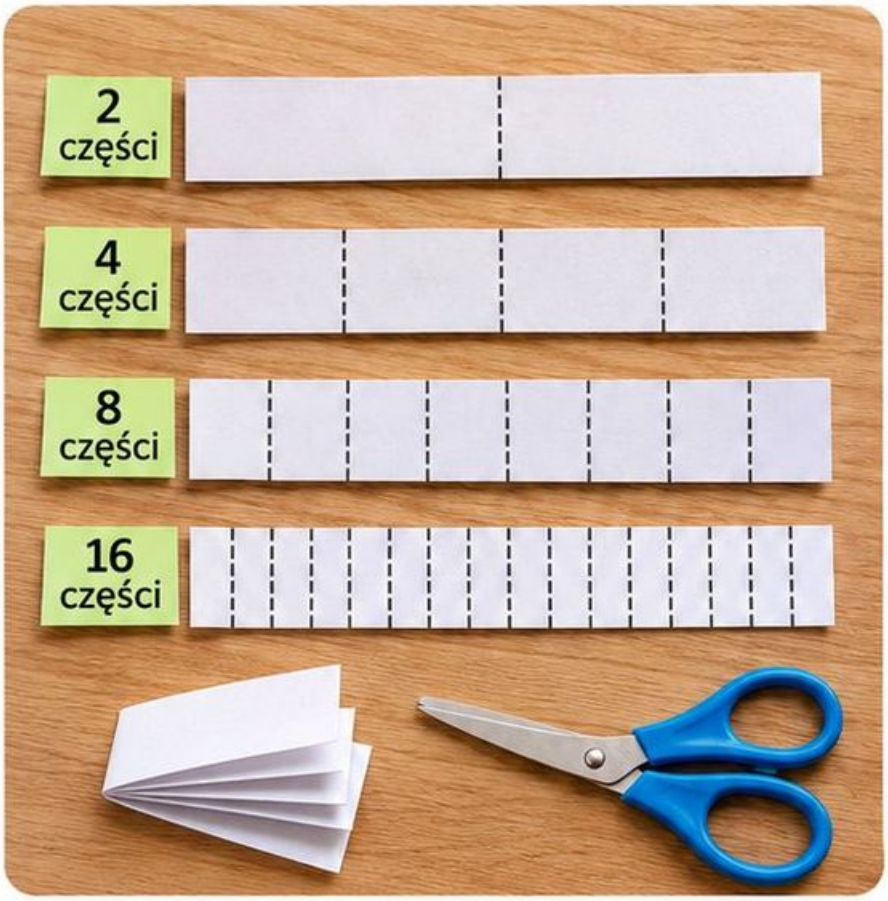
A085 • Potęgi przez składanie

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: pasek papieru i nożyczki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Złóż pasek na pół i zaznacz podział na 2 części.
2. Złóż ponownie, aby otrzymać 4 części, i zaznacz podział.
3. Powtórz, aby otrzymać 8 części, a następnie 16 części.
4. Zapisz liczby części jako **potęgi 2.**

Na osobnych modelach zaznacz podział na 2; 4; 8; 16 równych części. Zapisz liczby części jako potęgi 2. Oblicz, jaką częścią całości jest jeden fragment po 4 podziałach na pół.

A085 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: 2^1; 2^2; 2^3; 2^4; fragment 1/16. Model nie wymaga rzeczywistego wielokrotnego cięcia grubego papieru.

Pytanie kontrolne: Jak zapisać liczbę części po 10 takich podziałach? $2^{10}=1024$.



Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A086 • Przepis z kubkiem jednostkowym

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kubek, ryż lub papierowe ziarna i trzy pojemniki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1 Przewidywanie

2 minuty

2 Budowanie i próby

10 minut

3 Zapis

5 minut

4 Rozmowa

3 minuty

Model mieszanki przewiduje 2 kubki A i 3 kubki B. Zbuduj 1 porcję, a następnie 2 porcje. Ustal ilości dla łącznej objętości 15 kubków, zakładając dodawanie objętości.

A086 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.





Rozwiązanie lub kryterium: Jedna porcja: 2 kubki A i 3 kubki B; dwie: 4 A i 6 B. Stosunek 2:3; dla 15 kubków potrzeba 6 A i 9 B.

Pytanie kontrolne: Dlaczego dodanie po 1 kubku każdego składnika do pierwotnego przepisu nie zachowuje proporcji?

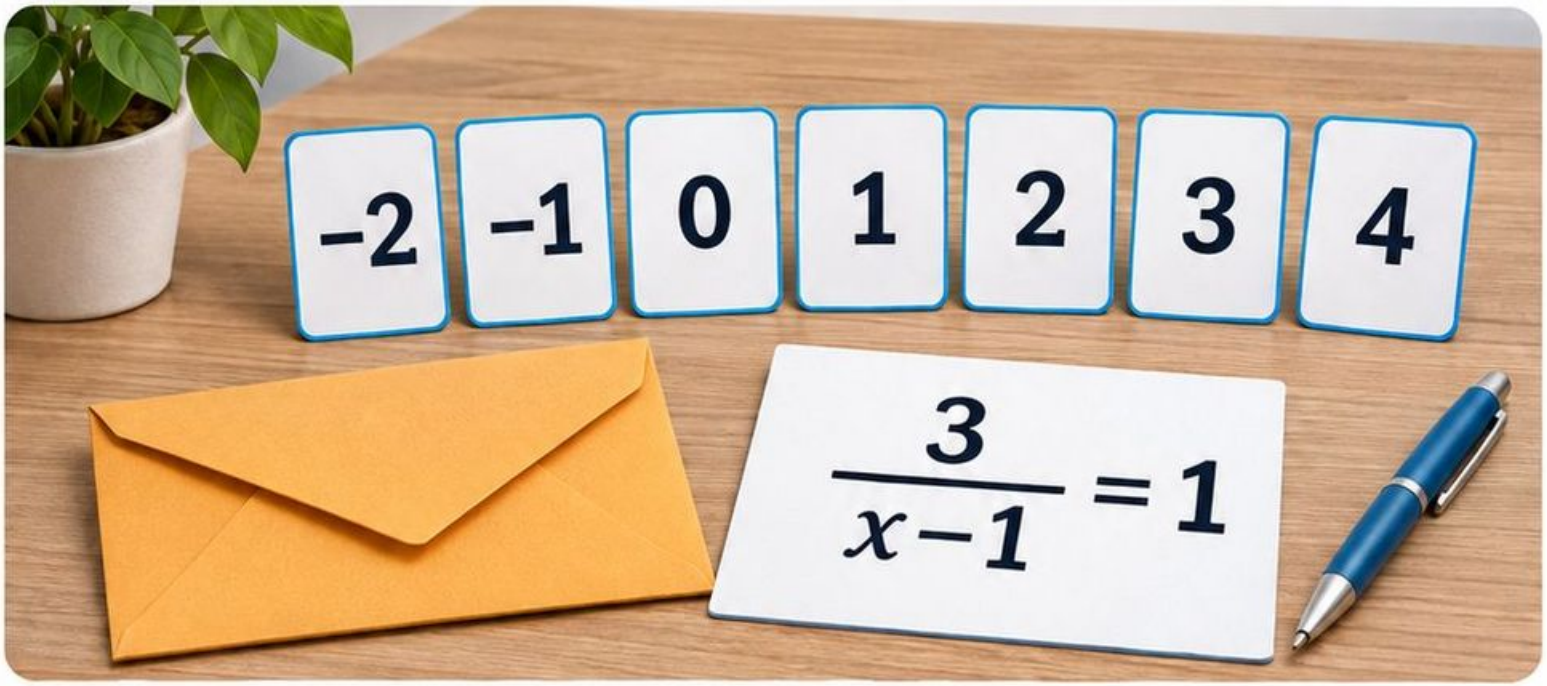
Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A087 • Zakazany mianownik

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty −2 do 4, koperta i zapis $3/(x-1)=1$.



Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1. **Oddziel kartę niedozwoloną przez mianownik.**

2. **Rozwiąż równanie, wybierz kartę odpowiedzi i sprawdź w pierwotnym zapisie.**

3. **Rozwiąż równanie, wybierz kartę odpowiedzi i sprawdź w pierwotnym zapisie.**

4. **Wyjaśnij, dlaczego skreślona karta nie może wrócić.**

A087 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: Dziedzina $x \neq 1$; $3 = x - 1$; $x = 4$; $\frac{3}{4-1} = 1$.

Pytanie kontrolne: Czy uproszczenie wzoru usuwa wcześniejsze ograniczenie dziedziny? Nie.

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

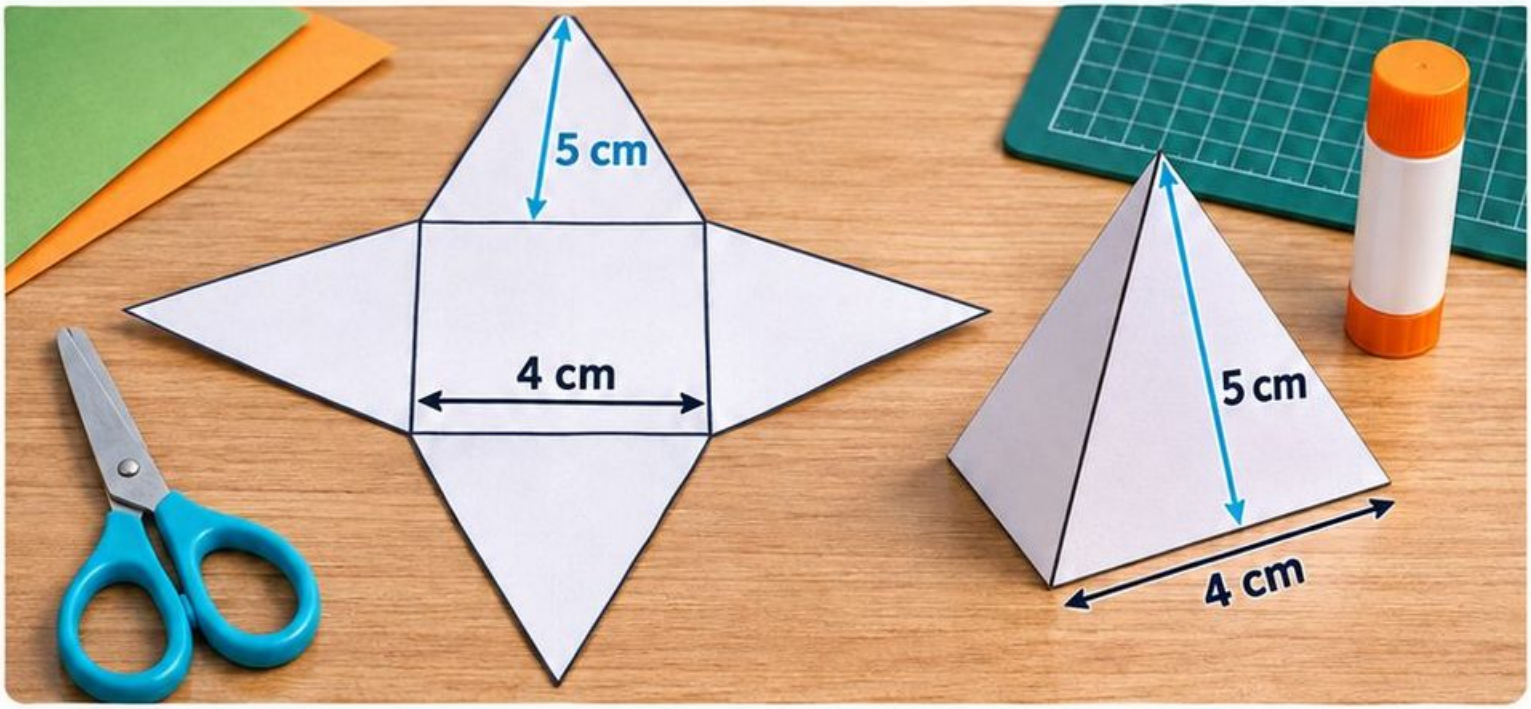
A088 • Ostrosłup z papieru

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: siatka ostrosłupa o kwadratowej podstawie 4 cm i ścianach wysokości 5 cm.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Wytnij siatkę, zaznacz cztery trójkąty i kwadrat.
2. Oblicz pole materiału bez zakładek.
3. Sklej i wskaż różnicę między wysokością ściany a wysokością bryły.

A088 • Zapis i omówienie



Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium:

Pole podstawy: 16 cm². Jedna ściana boczna: $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ cm².
Pole boczne wszystkich czterech ścian: 40 cm².
Pole całkowite: 56 cm².

Pytanie kontrolne:

Dlaczego 5 cm z siatki nie jest automatycznie wysokością ostrosłupa?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

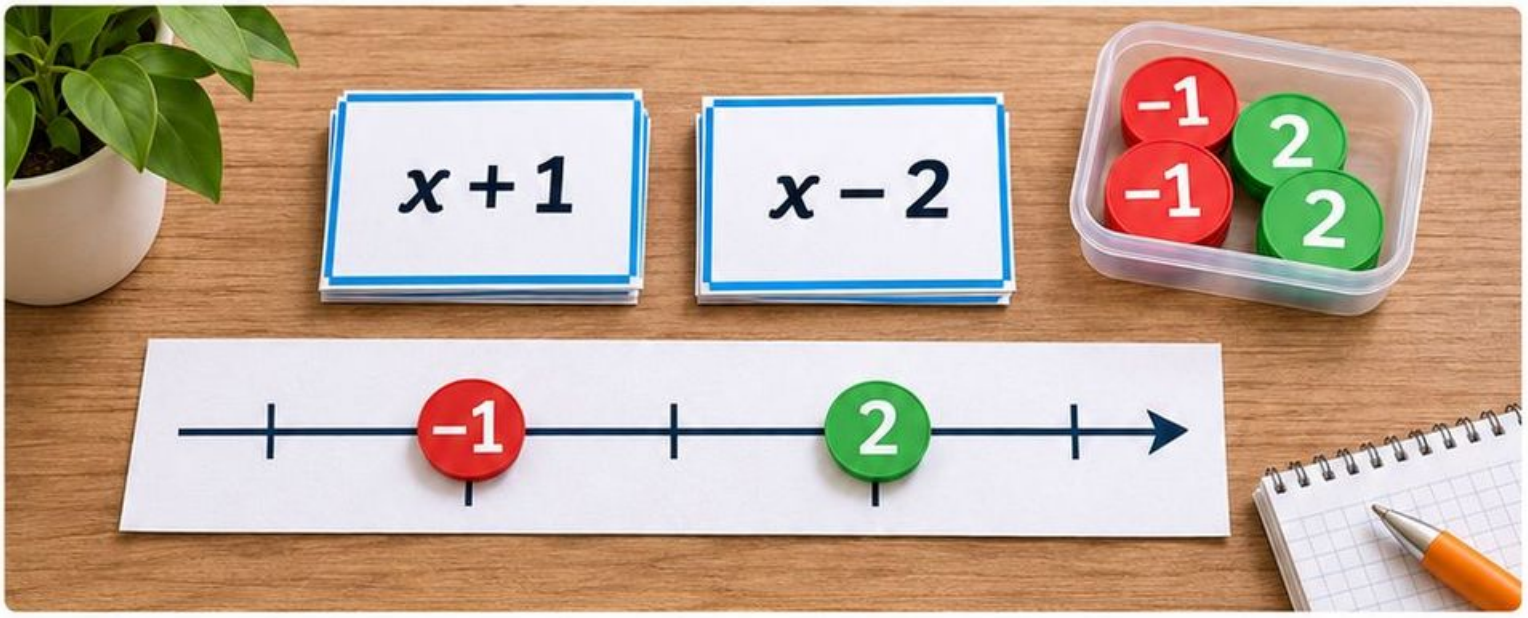
A089 • Znaki iloczynu na kartach

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: oś liczbowa, karty czynników i znaczniki −1; 2.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)

Rozwiąż $(x+1)(x-2)\leq 0$. Przetestuj po jednym punkcie z trzech przedziałów. Zbuduj tabelę znaków i zdecyduj o końcach.

A089 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:
Rozwiązanie [−1; 2]; ujemny iloczyn wewnątrz, zero na końcach.

Pytanie kontrolne:
Dlaczego sprawdzanie tylko $x=0$ nie wystarcza do opisania całego zbioru?

Dla nauczyciela:
sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A090 • Szafa kombinacji

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.



Materiały:
3 karty bluz
i 4 karty spodni.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

1. **Przewidywanie:** 2 minuty.
2. **Budowanie i próby:** 10 minut.
3. **Zapis:** 5 minut.
4. **Rozmowa:** 3 minuty.

Ułóż wszystkie komplety jednej bluzy i jednych spodni w prostokątnej tabeli. Następnie zaznacz dwa rodzaje obuwia dla każdego kompletu.

A090 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium: $3 \times 4 = 12$ kompletów; z obuwiem 24.

Pytanie kontrolne: Jak uniknąć pominięcia lub dwukrotnego policzenia kompletu?



Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

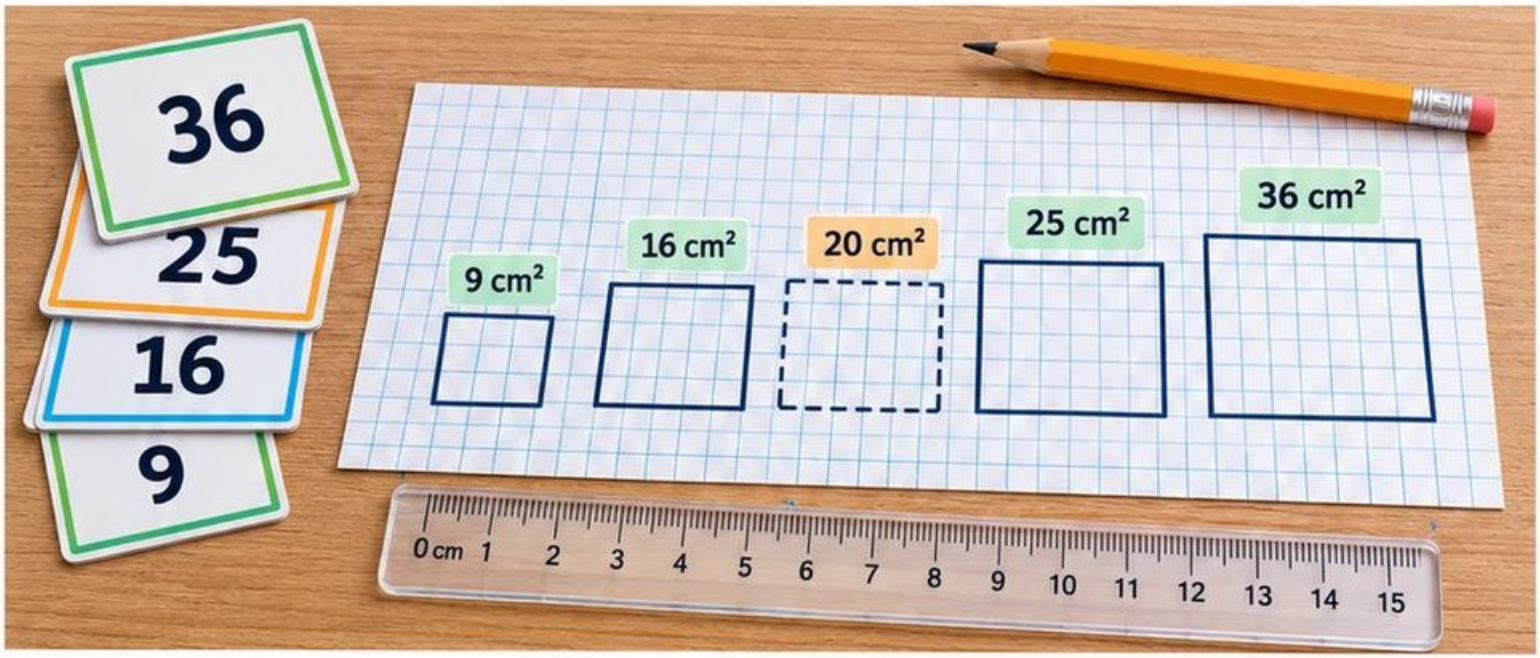
A091 • Kwadrat i jego bok

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kratka, karty pól 9; 16; 25; 36 i linijka.

Przewidywanie: 2 minuty. | **Budowanie i próby:** 10 minut. | **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. **Przewidywanie (2 minuty)**
2. **Budowanie i próby (10 minut)**
3. **Zapis (5 minut)**
4. **Rozmowa (3 minuty)**

Narysuj kwadraty o podanych polach w cm^2. Wyznacz dodatnie długości boków. Między kwadratami pola 16 i 25 umieść kartę 20 i określ granice jej boku.

A091 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

Boki: 3; 4; 5; 6 cm. Ponieważ $4 < \sqrt{20} < 5$, bok kwadratu o polu 20 cm^2 jest dłuższy od 4 cm i krótszy od 5 cm.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego $\sqrt{25}=5$, a równanie $x^2=25$ ma również rozwiązanie -5?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

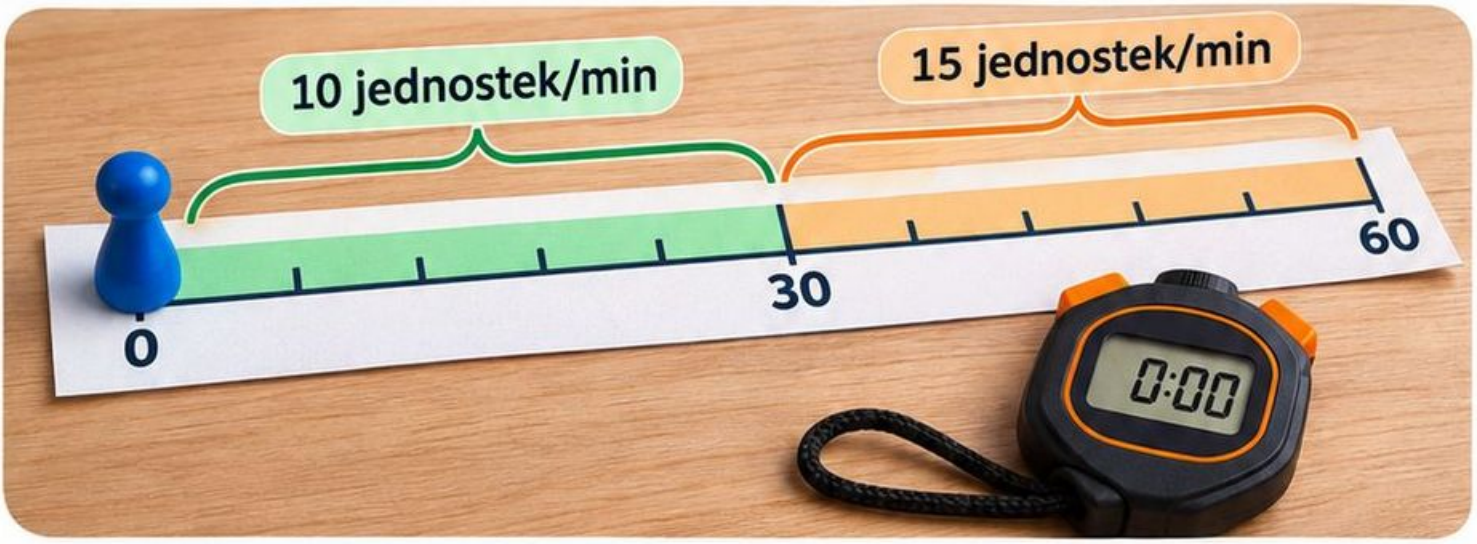
A092 • Prędkość z ruchu pionka

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: pasek drogi, pionek i stoper.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. **Przewidywanie –** zapisz przewidywanie dotyczące zależności opisanej w zadaniu.
2. **Budowanie –** przygotuj pasek drogi o długości 60 jednostek i ustaw na początku pionek.
3. **Próby i zapis –** wyznacz czasy dla pierwszych 30 jednostek przy prędkości 10 jednostek/min oraz dla drugich 30 przy 15. Zapisz otrzymane dane.
4. **Rozmowa –** na podstawie danych uzasadnij wniosek.

Umowna trasa ma 60 jednostek. Pierwsze 30 pokonaj modelem prędkości 10 jednostek/min, drugie 30 prędkością 15. Oblicz czasy z danych, zamiast mierzyć je rzeczywistym stoperem.

A092 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: Czasy 3 i 2 min; średnia 60/5=12 jednostek/min, nie 12,5.

Pytanie kontrolne: Dlaczego średnia dwóch prędkości nie działa przy równych drogach i różnych czasach?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A093 • Arytmetyczny ogród kubków

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: kubki i żetony.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Do pierwszego kubka włóż 4 żetony, a do każdego następnego o 3 więcej.
2. Zbuduj 5 kubków.
3. Wyznacz wzór i sumę.
4. Następnie oblicz liczbę żetonów w 10. kubku bez budowania.

A093 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model – wykonany



Dane

4; 7; 10; 13; 16

Działanie

suma 50

Wzór i wynik

$a_n = 4 + 3(n-1)$

$a_{10} = 31$

Wniosek

Suma pięciu pierwszych wyrazów tego ciągu wynosi 50, a dziesiąty wyraz wynosi 31.

Pytanie kontrolne: Dlaczego od pierwszego do dziesiątego kubka są 9 przyrostów?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

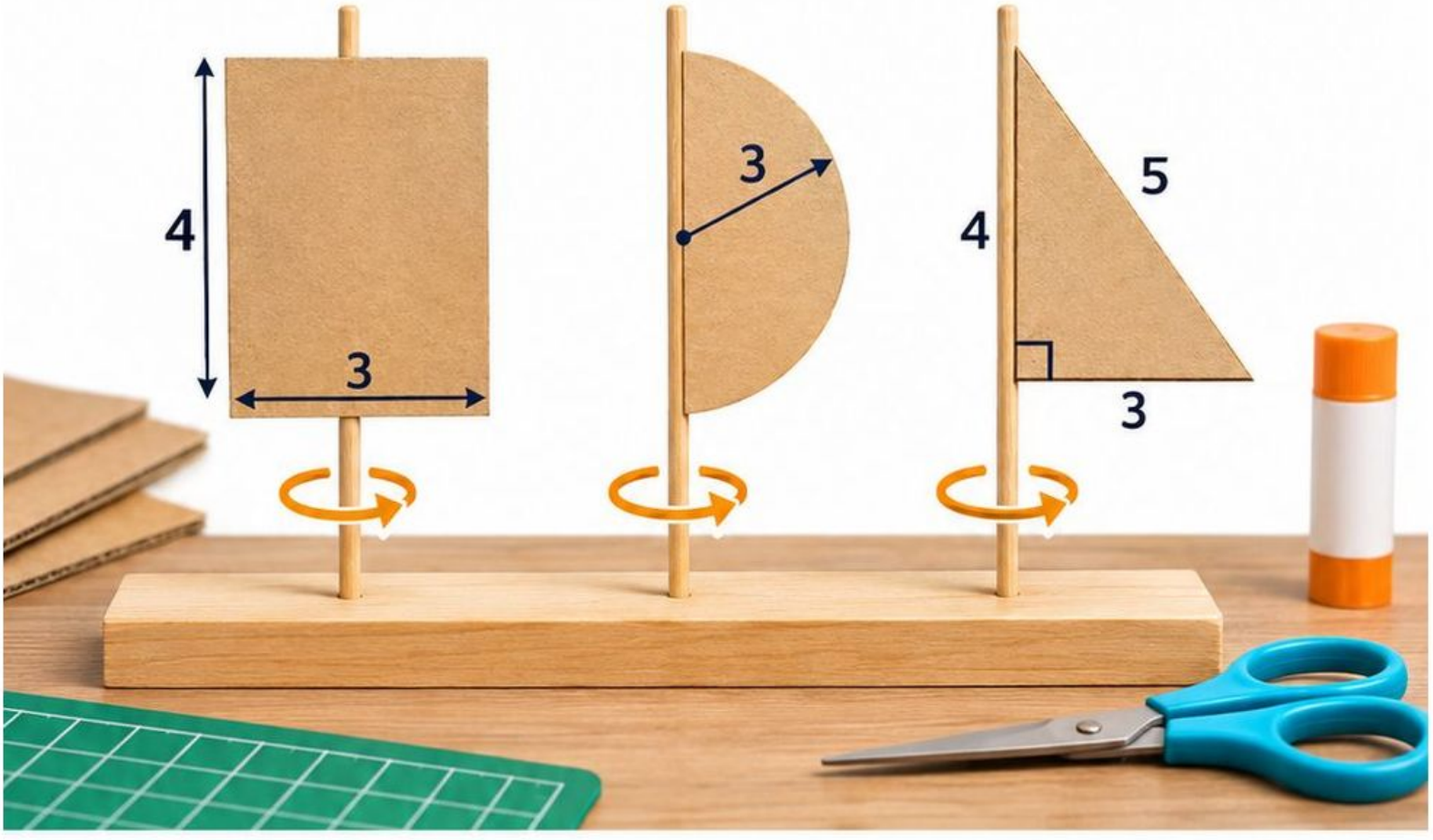
A094 • Bryły z papierowego obrotu

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: prostokąt, półkole i trójkąt z tektury oraz patyczek.

Przewidywanie: 2 minuty. Budowanie i próby: 10 minut. Zapis: 5 minut. Rozmowa: 3 minuty.



Przymocuj po jednym modelu do osi: prostokąt 3×4 wzdłuż 4, półkole promienia 3 wzdłuż średnicy, trójkąt prostokątny 3–4–5 wzdłuż 4. Opisz bryły powstające przy obrocie.

A094 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

Walec r 3, h 4, V 36π; kula r 3, V 36π; stożek r 3, h 4, V 12π w jednostkach sześciennych.



Wniosek:

Walec o $r=3$ i $h=4$ oraz kula o $r=3$ mają objętość 36π; stożek o $r=3$ i $h=4$ ma objętość 12π.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego identyczna wysokość nie oznacza identycznej objętości?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

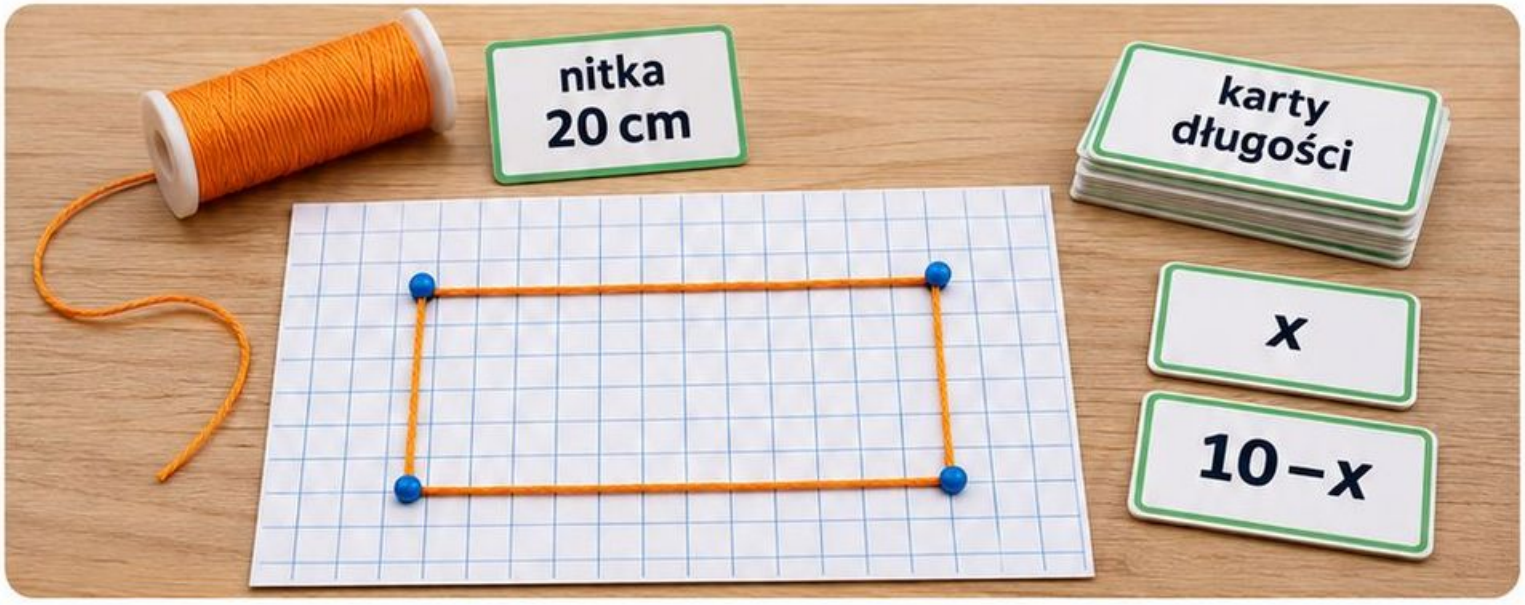
A095 • Prostokąty z dwudziestu jednostek brzegu

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: nitka 20 cm, kratka i karty długości.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



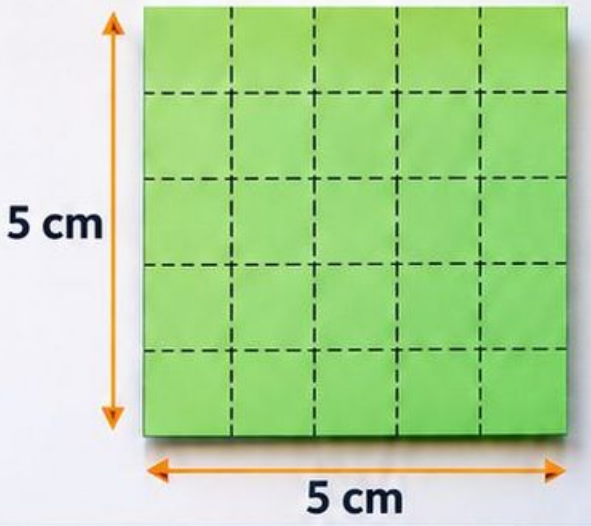
Zbuduj prostokąty o bokach x i $10-x$ dla całkowitych $x=1$ do 5. Zapisz pola i wyprowadź $P=-(x-5)^2+25$ dla $0<x<10$.

1. **Przewidywanie.** Zastanów się, jak będzie się zmieniać pole prostokąta, gdy x rośnie od 1 do 5.
2. **Budowanie i próby.** Korzystając z nitki 20 cm, zbuduj na kratce prostokąty o bokach x i $10-x$ dla $x=1$ do 5.
3. **Zapis.** Zapisz pola otrzymanych prostokątów i wyprowadź $P=-(x-5)^2+25$ dla $0<x<10$.
4. **Rozmowa.** Porozmawiajcie o wniosku wynikającym z badania.

A095 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model – gotowa praca



Dane

Długości boków prostokątów:
1×9 cm; 2×8 cm; 3×7 cm;
4×6 cm; 5×5 cm.

Działanie

Pola: 9; 16; 21; 24; 25 cm².

Obliczenia – pole na zapis

Wniosek

Rozwiązanie lub kryterium:
Pola 9; 16; 21; 24; 25 cm²;
maksimum 25 cm² dla 5×5 cm.

Pytanie kontrolne

Który krok uzasadnia maksimum także dla niecałkowitych długości?

Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami.
Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź.
Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

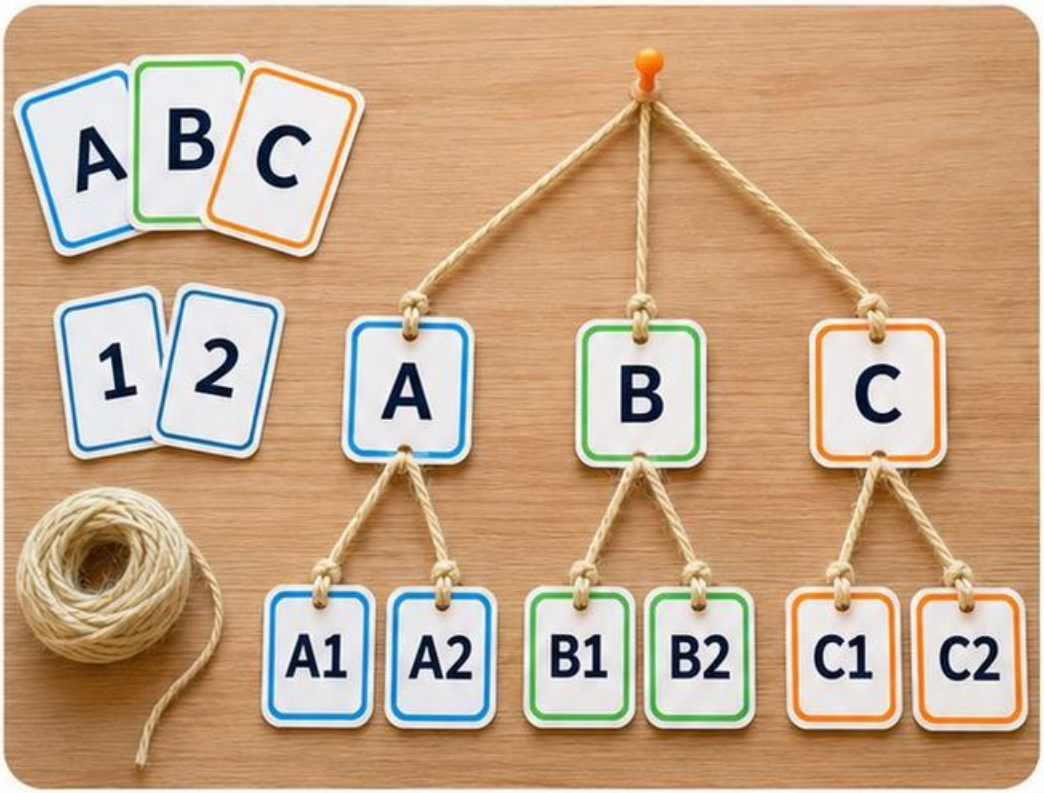
A096 • Drzewo dwóch wyborów

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty A, B, C i 1; 2 oraz sznurek.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut.
Zapis: 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. **Zbuduj drzewo:** na pierwszym poziomie A, B, C.
2. Z każdej gałęzi 1 lub 2.
3. Podpisz liście.

Przy równomiernych niezależnych wyborach oblicz szansę litery A i dowolnej liczby.

A096 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Model



Dane

Liście A 1, A 2, B 1, B 2, C 1, C 2; sześć wyników.

Działanie

$$P(\mathrm{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Wniosek

Prawdopodobieństwo wylosowania liścia z literą A wynosi $\frac{1}{3}$.

Pytanie kontrolne

Jak zmieni się liczba liści po dodaniu trzeciej liczby?

Dla nauczyciela

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

Rozwiązanie lub kryterium: Liście A 1, A 2, B 1, B 2, C 1, C 2; sześć wyników; $P(\mathrm{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

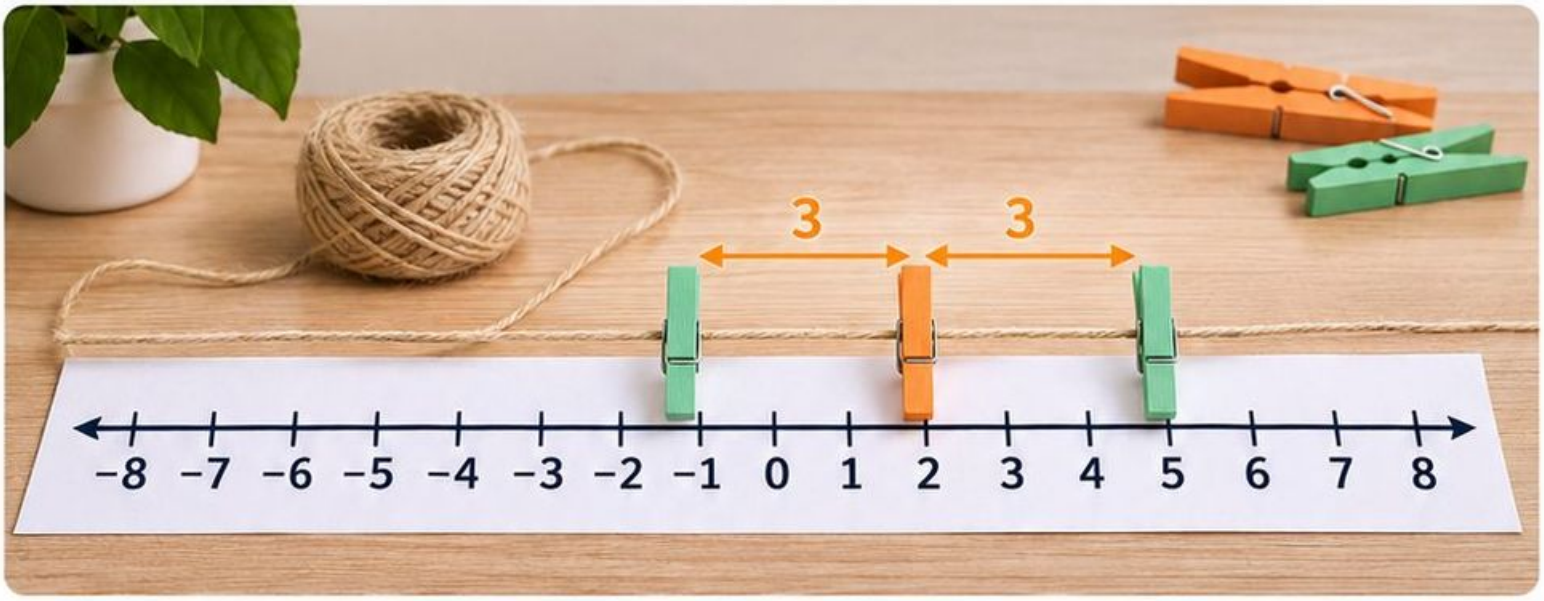
A097 • Odległości na sznurku

Liceum i technikum • 20 minut

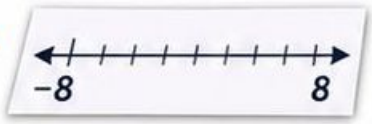
Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: oś papierowa od −8 do 8, sznurek i klamerki.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1



Zaznacz środek 2 i odległość 3 w obie strony.

2



Odczytaj punkty oraz wszystkie położenia w odległości nie większej niż 3.

3



Zapisz modułem.

A097 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

Punkty -1 i 5; $|x-2|=3$.

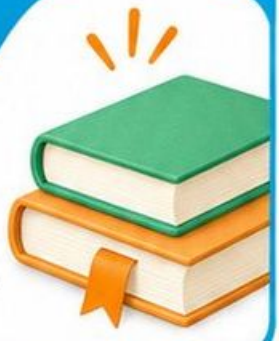
Dla $|x-2|\leq 3$ zbiór $[-1;5]$.

Pytanie kontrolne:

Dlaczego rozwiązaniem nierówności jest cały odcinek, a nie tylko jego końce?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.



A098 • Budżet z paczkami

Klasy 7–8 • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: karty paczek po 8 i po 10 sztuk i żetony zł.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. **Przewiduj:** określ, która oferta może być korzystniejsza przy budżecie 65 zł.
2. **Buduj:** układaj karty paczek, aby uzyskać co najmniej 34 ołówki, osobno dla **A** i osobno dla **B**.
3. **Porównaj:** wyznacz łączny koszt w każdej z ofert, z uwzględnieniem dostawy.
4. **Zapisz i uzasadnij:** podaj minimalną liczbę pełnych paczek i sformułuj wniosek.

Potrzeba 34 ołówków. A: sztuk 8 za 12 zł, dostawa 6 zł. B: sztuk 10 za 16 zł, dostawa bezpłatna. Ułóż minimalną liczbę pełnych paczek i porównaj koszty przy budżecie 65 zł. Rozpatrz osobno zakup wyłącznie w A albo wyłącznie w B; nie łącz ofert.

A098 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: A 5 paczek=40 sztuk, 66 zł; B 4 pacz*ki*=40 sztuk, 64 zł. B mieści się, zostaje 1 zł.

Pytanie kontrolne: Dlaczego zaokrąglenie liczby paczek w dół nie spełnia zamówienia?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

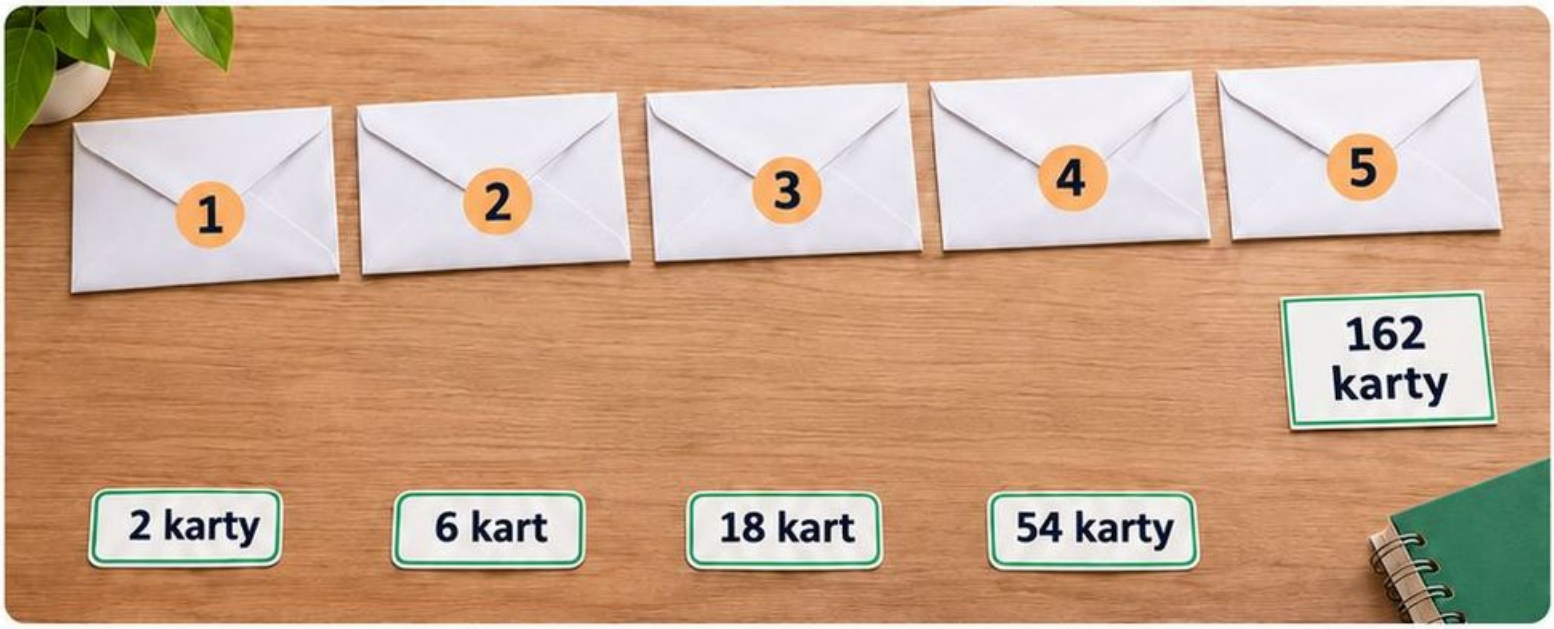
A099 • Geometryczne powielanie kart

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: papierowe karty i 5 kopert.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



1. Do pierwszej koperty włóż 2 karty.
2. Do każdej następnej koperty włóż 3 razy więcej kart niż do poprzedniej.
3. Wypełnij pierwsze 4 koperty.
4. Piątą kopertę opisz liczbą zamiast wycinać wszystkie karty.

W pierwszej kopercie umieść 2 karty, a w każdej następnej 3 razy więcej. Wypełnij pierwsze 4 koperty, piątą opisz liczbą zamiast wycinać wszystkie karty. Oblicz sumę 5 etapów.

A099 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium: 2; 6; 18; 54; 162; suma 242; $a_n = 2 \times 3^{n-1}$.

Pytanie kontrolne: Dlaczego piąty wyraz wymaga czterech mnożeń przez 3?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

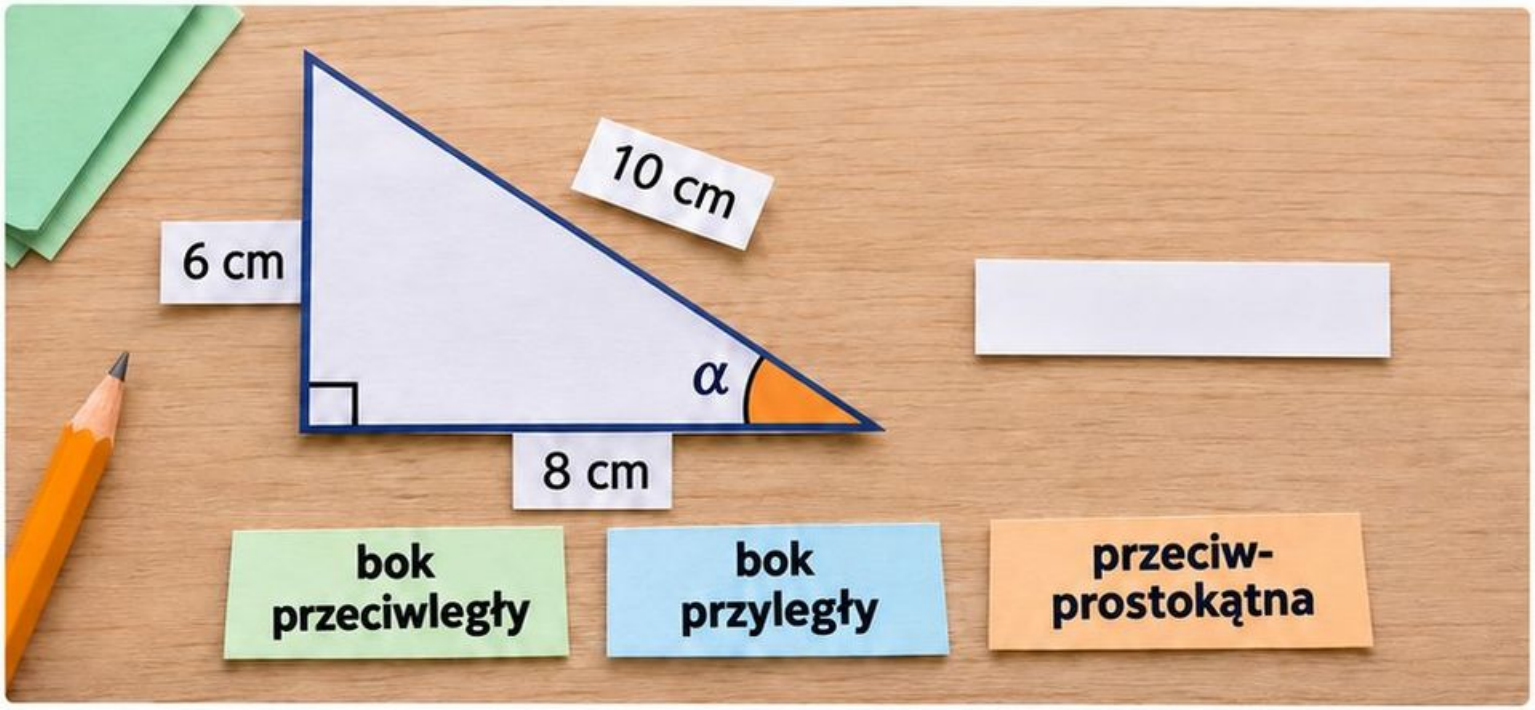
A100 • Trygonometria na trójkącie

Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: trójkąt prostokątny 6–8–10 cm, kątomierz i etykiety.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.



Wskaż kąt α naprzeciw boku 6. Oznacz bok przeciwległy, przyległy i przeciwprostokątną. Zapisz trzy ilorazy. Następnie zamień α na drugi kąt ostry.

1. **Przewidywanie** (2 minuty)
2. **Budowanie i próby** (10 minut)
3. **Zapis** (5 minut)
4. **Rozmowa** (3 minuty)

A100 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.



Rozwiązanie lub kryterium:

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3}{4}$. Dla drugiego kąta $\sin\frac{4}{5}$, $\cos\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\,\frac{4}{3}$.

Pytanie kontrolne:

Co pozostaje przeciwprostokątną po zmianie wskazanego kąta?

Dla nauczyciela:

sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

A101 • Dwa modele wzrostu

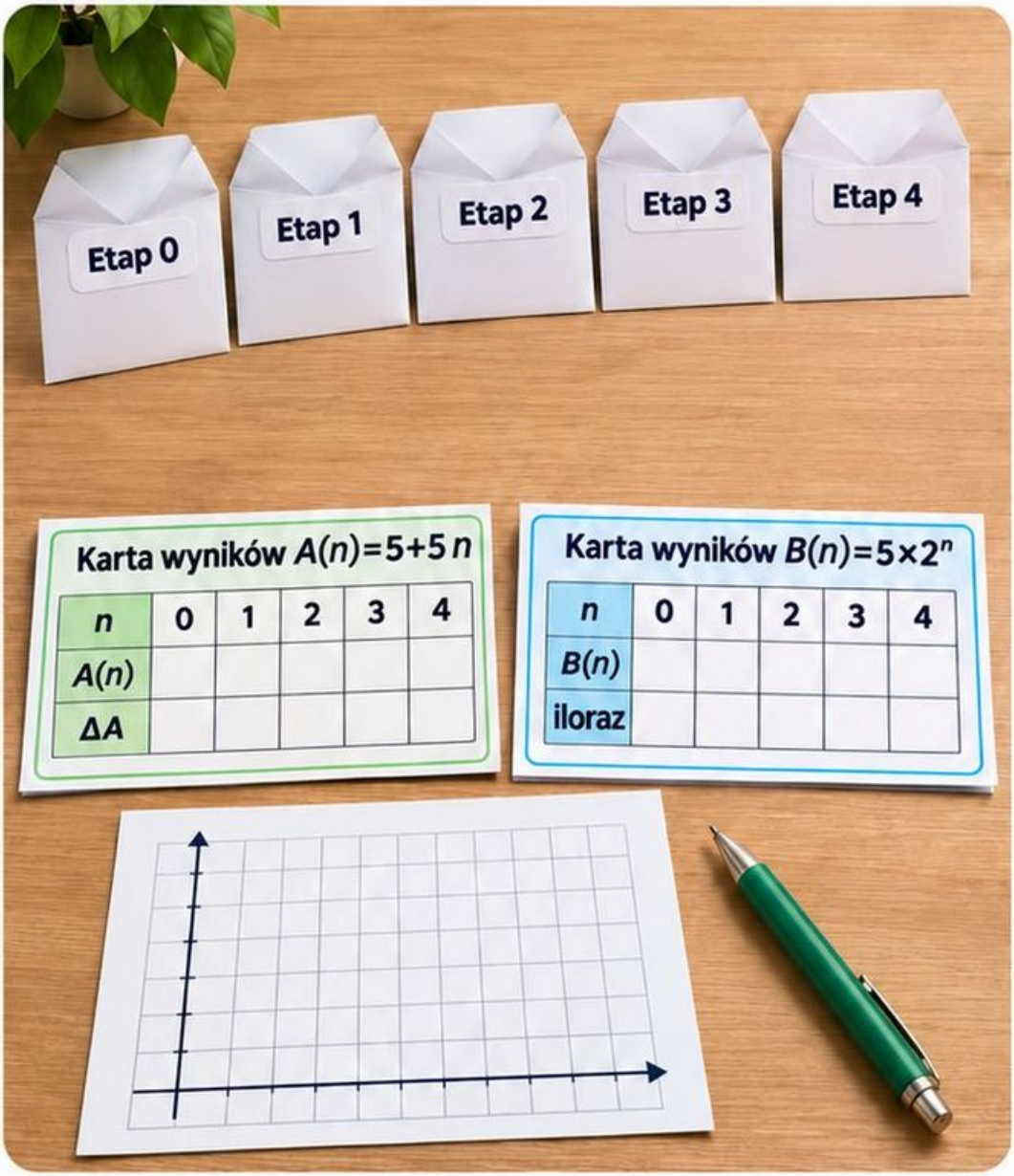
Liceum i technikum • 20 minut

Cel: zbadaj zależność opisaną w zadaniu i uzasadnij wniosek.

Materiały: koperty etapów 0–4, karty wyników i żetony.

Przewidywanie: 2 minuty. **Budowanie i próby:** 10 minut. **Zapis:** 5 minut. **Rozmowa:** 3 minuty.

Przygotuj modele $A(n)=5+5\,n$ oraz $B(n)=5\times 2^n$. Wpisz wartości etapów 0–4, porównaj różnice i ilorazy. Narysuj punkty dwóch modeli tą samą skalą.



1 Przewidywanie

Wstępnie określ, jak będą się zmieniać oba modele.

2 Budowanie

Korzystając z kopert etapów 0–4, zbuduj modele z żetonów.

3 Zapis

Wpisz wartości etapów 0–4, porównaj różnice i **ilorazy**.

4 Rozmowa

Narysuj punkty dwóch modeli tą samą skalą i uzasadnij wniosek.

A101 • Zapis i omówienie

Zapisz dane, działanie i wniosek pełnym zdaniem.

Rozwiązanie lub kryterium: A: 5; 10; 15; 20; 25; B: 5; 10; 20; 40; 80. Wspólne etapy 0 i 1 nie rozstrzygają dalszego modelu.



Pytanie kontrolne: Jakie dodatkowe założenie pozwala przewidywać kolejne etapy?

Dla nauczyciela: sprawdź zgodność modelu z warunkami. Poproś o wskazanie, który element modelu uzasadnia odpowiedź. Oceniaj rozumowanie, nie wygląd pracy.

Zamienniki materiałów

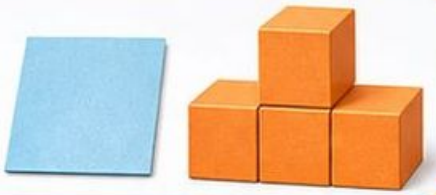


→ **Nakrętki** → kwadraty z tektury lub kamyki jednakowej wielkości.





→ **Klocki** → papierowe kwadraty; przy objętości używaj rzeczywistych sześcianów albo wyraźnego rysunku warstw.





→ **Koperty** → złożone kartki zasłaniające wartość.





→ **Nitka** → pasek papieru o kontrolowanej długości.





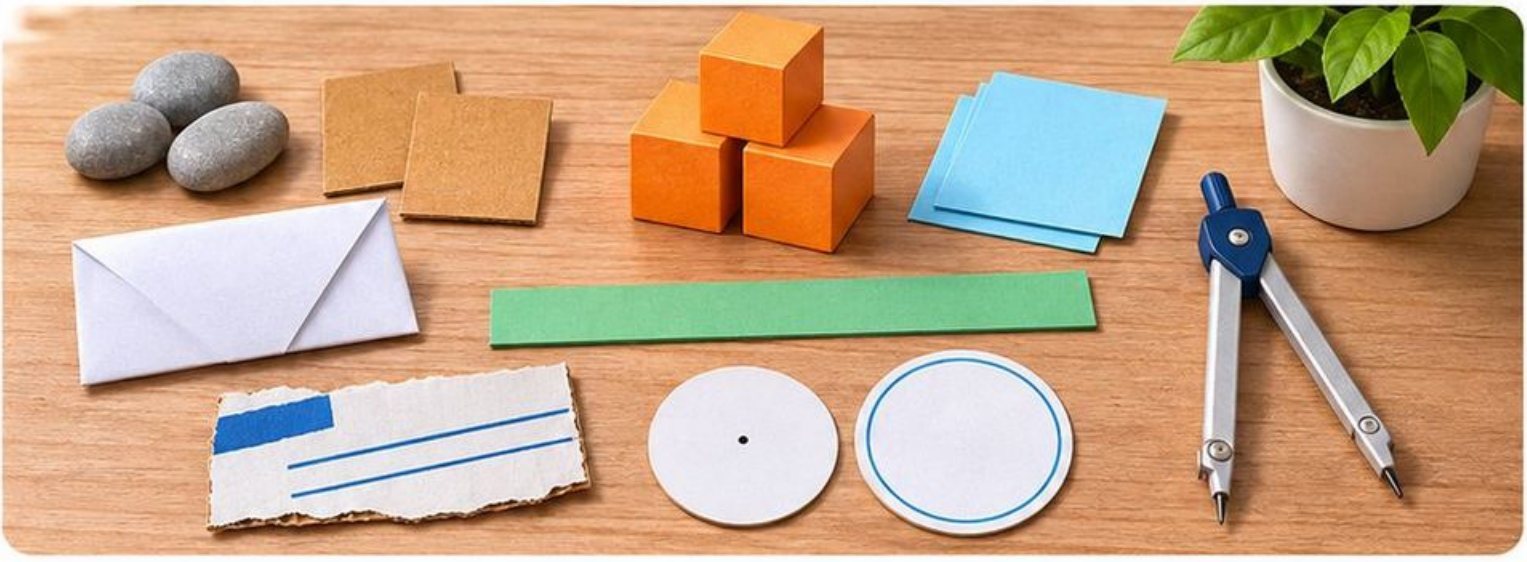
→ **Karty** → zapisane fragmenty opakowania.





→ **Cyrkiel** → gotowe elementy przygotowane przez nauczyciela; nie nazywaj odręcznego szkicu dokładną konstrukcją.





Zastąpienie materiału powinno zachować relację matematyczną, jednostkę i możliwość sprawdzenia wyniku.

Źródła i zakres

ZPE: Matematyka, szkoła podstawowa — zpe.gov.pl/podstawa-programowa/szkola-podstawowa/matematyka

ZPE: Matematyka, szkoła ponadpodstawowa — zpe.gov.pl/podstawa-programowa/szkola-ponadpodstawowa/matematyka

MEN: informacje o stopniowym wdrażaniu podstaw od 2026 r. — gov.pl/web/edukacja

Dobierz aktywność do aktualnego programu konkretnej klasy. Materiały oznaczone „Liceum i technikum" nie są wspólnym wymaganiem dla klas 4–8.

Aktywności i dane przykładowe są autorskim opracowaniem. Pomiary rzeczywiste mogą różnić się ze względu na dokładność przyrządów.



Wersja 1.0 • listopad 2026.